

# WISKUNDE

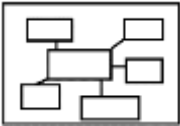





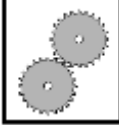

2025 LENTESKOOL

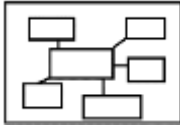





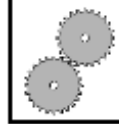

GRAAD 12

## HANDLEIDING VIR ONDERWYSERS EN LEERDERS



## IKON BESKRYWING

			
<b>BREINKAART</b>	<b>EKSAMEN RIGLYN</b>	<b>INHOUD</b>	<b>AKTIWITEITE</b>
			
<b>BIBLIOGRAFIE</b>	<b>TERMINOLOGIE</b>	<b>UITGEWERKTE VOORBEELDE</b>	<b>STAPPE</b>

			
<b>MIND MAP</b>	<b>EXAMINATION GUIDELINE</b>	<b>CONTENTS</b>	<b>ACTIVITIES</b>
			
<b>BIBLIOGRAPHY</b>	<b>TERMINOLOGY</b>	<b>WORKED EXAMPLES</b>	<b>STEPS</b>



## **INHOUDSOPGAWE**

## **BLADSY**

<b>Finansies, Groei en Verval</b>	4 – 12
<b>Statistiek en Regressie</b>	13 – 35
<b>Analitiese Meetkunde</b>	36 – 54
<b>Inligtingsblad</b>	55
<b>Bibliografie</b>	56

**FINANSIES, GROEI EN VERVAL****Eenvoudige Groei****Formule:**  $A = P(1 + n \cdot i)$  $A$  = Die eind-bedrag $P$  = Die begin-bedrag $n$  = aantal jare $i$  = rentekoers in desimale**Saamgestelde Groei****Formule:**  $A = P(1 + i)^n$  $A$  = Die eind-bedrag $P$  = Die begin-bedrag $n$  = aantal jare $i$  = rentekoers in desimale**Uitgewerkte Voorbeeld (November 2010 V7.1)**

Teen watter jaarlikse persentasie rentekoers, kwartaaliks saamgestel, moet 'n lomp som (enkelbedrag) belê word sodat dit in 6 jaar verdubbel?

**Oplossing:**

$$A = P(1 + i)^n$$

$$2P = P \left( 1 + \frac{r}{400} \right)^{6 \times 4}$$

$$2 = \left( 1 + \frac{r}{400} \right)^{24}$$

$$1 + \frac{r}{400} = 2^{\frac{1}{24}}$$

$$r = 400 \left( 2^{\frac{1}{24}} - 1 \right)$$

$$r = 400 \left( 2^{\frac{1}{24}} \right) - 400$$

$$r = 11,72\% \text{ p.a.}$$

**Enkelvoudige Verval****(Reguitlyn waardevermindering)****Formule:  $A = P(1 - n \cdot i)$**  $A$  = Die eind-bedrag $P$  = Die begin-bedrag $n$  = aantal jare $i$  = rentekoers in desimale***N.B die begin bedrag is groter as die eind-bedrag.*****Saamgestelde Verval****(Waardevermindering op 'n verminderde saldo)****Formule:  $A = P(1 - i)^n$**  $A$  = Die eind-bedrag $P$  = Die begin-bedrag $n$  = aantal jare $i$  = rentekoers in desimale***N.B die begin bedrag is groter as die eind-bedrag.*****Oplossing vir  $n$** 

$$A = P(1 \pm i)^n$$

$$(1 \pm i)^n = \frac{A}{P}$$

$$\log (1 \pm i)^n = \log \frac{A}{P}$$

$$n \log (1 \pm i) = \log A - \log P$$

$$\therefore n = \frac{\log A - \log P}{\log(1 \pm i)}$$

**Uitgewerkte Voorbeeld (November 2011 V7.1)****Hoeveel jaar sal dit neem vir 'n item om te verminder tot die helfte van sy waarde teen 7% p.j op die verminderde-saldo metode?****Oplossing:**

$$A = P(1 - i)^n$$

$$\frac{P}{2} = P(1 - 0,07)^n$$

$$\frac{1}{2} = 0,93^n$$

$$\log_{0,93} \frac{1}{2} = n$$

$$n = 9,55 \text{ years} \quad / \text{ jare}$$

## **Nominale en Effektiewe Rentekoers**

### **Nominale Koers**

Die koers gekwoteer, en saamgetelde periodes is verskillend:

b.v. 10% p.j. kwartaaliks saamgestel

### **Effektiewe Koers**

Die koers gekwoteer, en saamgestelde periodes is dieselfde:

b.v. 10% p.j. jaarliks saamgestel

5% per maand, maandeliks saamgestel

**Formule om vanaf nominale koers na effektiewe koers te herlei  
(en vice versa)**

$$1 + i_{eff} = \left( 1 + \frac{i_{nom}}{m} \right)^m$$

$i_{eff}$  = **effektiewe jaarlikse koers**

$i_{nom}$  = **nominale koers**

$m$  = **aantal saamgestelde periodes per jaar**

**Toekomstige waarde Annuïteit**

**Formule:**  $F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$

$F$  = Toekomstige waarde

$x$  = vasgestelde gereelde betalings / paaieimente

$n$  = aantal betalings / paaieimente

$i$  = rentekoers in desimale

Wanneer daar 'n "x" onmiddellike betaling gemaak word en die laaste betaling aan die einde van die periode gemaak word:

Gebruik dan die volgende formule:  $F = \frac{x[(1+i)^{n+1} - 1]}{i}$

Wanneer daar 'n onmiddellike betaling gemaak word van 'n bedrag wat nie  $x$  is nie, sê  $t$ , en die laaste betaling word aan die einde van die periode gemaak:

Gebruik dan die volgende formula:  $F = t(1+i)^n + \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$

Wanneer betalings aan die begin van elke periode gemaak word of wanneer betalings aan die einde van elke periode gemaak word en die laaste betaling word gemaak, byvoorbeeld 1 maand voor die einde van die periode as rente maandeliks saamgestel word: When payments are made at the beginning of each period or when payments are made at the end of each period and the last payment is made, for an example 1 month before the end of the period if interest is compounded monthly:

Gebruik dan die volgende formule:  $F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i} \times (1+i)^n$

**Delgingsfonds**

Delgingsfonds as 'n bedrag wat belê word om iets in die toekoms te vervang (b.v. Voertuig, Masjiene). Ons gebruik toekomstige waarde annuïteit om geld in gereelde tussenposes te spaar vir geld om in die toekoms te gebruik.

N.B Delgingsfonds ( wanneer die bedrag nie gemeld word nie)

= *Nuwe prys na inflasie* – *Boekwaarde/Skrootwaarde*

**Uitgewerkte Voorbeeld (November 2012 Q7.1)****VRAAG 7**

7.1 'n Besigheid koop 'n masjien wat R120 000 kos. Die masjien se waarde verminder teen 9% per jaar volgens die verminderdesaldo-metode.

7.1.1 Bepaal die afskryfwaarde ('scrap value') van die masjien aan die einde van 5 jaar. (3)

7.1.2 Na vyf jaar moet die masjien vervang word. Gedurende hierdie tyd het inflasie konstant gebly teen 7% per jaar. Bepaal die koste van die nuwe masjien aan die einde van 5 jaar. (3)

7.1.3 Die besigheid beraam dat hulle R90 000 aan die einde van vyf jaar gaan benodig. 'n Delgingsfonds vir R90 000, waarin gelyke maandelikse paaieimente betaal moet word, word daargestel. Rente op hierdie fonds is 8,5% per jaar, maandeliks saamgestel. Die eerste paaieiment sal dadelik betaal word en die laaste paaieiment sal aan die einde van die 5 jaar-periode betaal word.

Bereken die waarde van die maandelikse paaieiment vir die delgingsfonds. (5)

**Oplossing**

7.1.1	$A = P(1 - i)^n$ $= 120\,000(1 - 0,09)^5$ $= R74\,883,86$
7.1.2	$A = P(1 + i)^n$ $= 120\,000(1 + 0,07)^5$ $= R168\,306,21$
7.1.3	<p>Sinking fund needed: <math>F_v = R\,90\,000</math>      = Delgingsfonds benodig:</p> $F_v = \frac{x[(1 + i)^n - 1]}{i}$ $90\,000 = \frac{x \left[ \left( 1 + \frac{0,085}{12} \right)^{61} - 1 \right]}{\frac{0,085}{12}}$ $x = R\,1\,184,68$



**Huidige Waarde Annuïteit**

**Formule:**  $P = \frac{x[1-(1+i)^{-n}]}{i}$

$P$  = Huidige waarde (lening-bedrag)

$x$  = vasgestelde gereelde betalings / paaieimente

$n$  = aantal betalings / paaieimente

$i$  = rentekoers in desimale

**Rente betaal**

Rente bedrag betaal = Alle betalings gemaak – lening-bedrag

**Balans op die lening**

$$\text{Balans} = P(1 + i)^n - \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$$

OF

$$\text{Balans} = \frac{x[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$n \rightarrow$  aantal oorblywende betalings

**Uitgewerkte Voorbeeld (November 2010 Q7.2)****7.2**

Timothy koop meubels ter waarde van R10 000. He leen die geld op 1 February 2010 van 'n finansiële instelling, wat rente hef teen 'n koers van 9,5% p.j. maandeliks saamgestel. Timothy stem in om maandelikse paaieimente van R450 te betaal. Die ooreenkoms van die lening laat Timothy toe om hierdie gelyke maandelikse paaieimente vanaf 1 Augustus 2010 te begin betaal.

7.2.1 Bereken die totale bedrag wat aan die finansiële instansie op 1 Julie 2010 verskuldig is.

7.2.2 Hoeveel maande sal die Timothy nee mom die lening terug te betaal?

7.2.3 Wat is die balans van die lening onmiddelik nadat Timothy die 25ste betaling gemaak het?

**Oplossing**

7.2.1	$A = 10000 \left( 1 + \frac{0,095}{12} \right)^5$ $= R\ 10\ 402,15$
-------	---

**7.2.2**

$$10402,15 = \frac{450 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{0,095}{12} \right)^{-n} \right]}{\frac{0,095}{12}}$$

$$0,183000787 = 1 - \left( 1 + \frac{0,095}{12} \right)^{-n}$$

$$\left( 1 + \frac{0,095}{12} \right)^{-n} = 0,816999213$$

$$\log \left( 1 + \frac{0,095}{12} \right)^{-n} = \log 0,816999213$$

$$-n \log \left( 1 + \frac{0,095}{12} \right) = \log 0,816999213 \dots$$

$$n = 25,63151282 \dots$$

$$n = 25,63 \text{ months}$$

$$n = 26$$

7.2.3	<b>Balance outstanding after 25 months</b> $= 10402,15 \left( 1 + \frac{0,095}{12} \right)^{25} - \frac{450 \left[ \left( 1 + \frac{0,095}{12} \right)^{25} - 1 \right]}{\frac{0,095}{12}}$ $= R\ 282,36$	<b>Uitstaande Balans na 25 maande</b>
-------	--	---------------------------------------

**OR**

$$n = 25,6315128204 \dots - 25$$

$$= 0,6315128204 \dots$$

**Balance Outstanding after 25 months**

$$= \frac{450 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{0,095}{12} \right)^{-0,631512804} \right]}{\frac{0,095}{12}}$$

$$= R\ 282,36$$

**Uitstaande Balans na 25 maande**

## **AKTIWITEITE**

### **Finansies, Groei en Verval**

*(Mei/Junie 2024)*

#### **VRAAG 7**

- 7.1 Thabo het ses jaar gelede 'n foon vir R13 000 gekoop. Die waarde van die foon het jaarliks volgens die verminderdesaldo-metode verminder. Die waarde van die foon is nou R8 337,75. Bereken die jaarlikse depresiasiekoers. (3)
- 7.2 Eric en Thandi moet elkeen R80 000 spaar om aan die einde van Desember 2027 met vakansie te gaan.
- Thandi besluit dat sy teen die einde van Januarie 2025 sal begin spaar. Sy sal 36 maandelikse deposito's in 'n spaarrekening maak, wat teen 8,6% p.j. rente betaal, maandeliks saamgestel. Die deposito sal aan die einde van elke maand gemaak word.
  - Eric bereken dat as hy aan die einde van Januarie 2024 begin en 48 deposito's van R1 402,31 maak, hy genoeg geld sal hê om met vakansie te gaan. Hy sal sy deposito's aan die einde van elke maand in 'n spaarrekening maak. Die spaarrekening betaal rente teen 8,6% p.j., maandeliks saamgestel.
- Bereken die verskil tussen die totale bedrag geld wat Eric en Thandi oor die gegewe tydperk in hulle onderskeie spaarrekenings sal deponeer. (4)
- 7.3 'n Lening van R225 000 is aan Lesibana toegestaan. Die rentekoers van die lening is 9% p.j., maandeliks saamgestel. Lesibana sal maandelikse betalings van R5 500 maak, met die eerste betaling presies vier maande nadat die lening toegestaan is. Hoeveel betalings sal Lesibana maak om die lening te vereffen? (6)
- [13]

*(Mei/Junie 2023)*

**VRAAG 6**

- 6.1 'n Maatskappy het op 1 Julie 2022 'n fotostaatmasjien vir R150 000 gekoop. Hulle sal die ou fotostaatmasjien inruil wanneer hulle dit oor 5 jaar, op 30 Junie 2027, met 'n soortgelyke nuwe fotostaatmasjien vervang.
- 6.1.1 Die gemiddelde inflasiekoers vir die volgende 5 jaar sal 6,5% p.j. wees. Bepaal die prys van 'n soortgelyke nuwe fotostaatmasjien oor 5 jaar. (2)
- 6.1.2 Bereken die inruilwaarde van die ou fotostaatmasjien na 5 jaar, indien dit teen 'n koers van 9% p.j. volgens die reguitlynmetode depresieer. (2)
- 6.1.3 Die maatskappy het 'n delgingsfonds gestig om die vervangingskoste van die nuwe fotostaatmasjien te dek. Die fonds verdien rente teen 7,85% p.j., maandeliks saamgestel. Die maatskappy het hulle eerste maandelikse deposito op 31 Julie 2022 gemaak en sal tot 31 Mei 2027 voortgaan om dit te doen, een maand voordat die nuwe fotostaatmasjien gekoop word. Hoeveel moet aan die einde van elke maand gedeponeer word sodat die maatskappy die nuwe fotostaatmasjien kan koop? (4)
- 6.2 Andrew het vandag R200 000 by 'n bank geleen. Die bank hef rente teen 5,25% p.j., kwartaalliks saamgestel. Andrew sal aan die einde van elke 3 maande terugbetalings van R6 000 maak. Sy eerste terugbetaling sal 3 maande van nou af gemaak word. Hoeveel jaar sal dit Andrew neem om hierdie lening terug te betaal? (5)  
[13]

*(Mei/Junie 2022)*

**VRAAG 7**

- 7.1 Hoeveel jaar sal dit 'n belegging neem om in waarde te verdubbel indien die belegging rente verdien teen 'n koers van 8,5% p.j., kwartaalliks saamgestel? (4)
- 7.2 'n Maatskappy het masjinerie vir R500 000 gekoop. Na 5 jaar is die masjinerie vir R180 000 verkoop en nuwe masjinerie is gekoop.
- 7.2.1 Bereken die waardeverminderingskoers van die ou masjinerie oor die 5 jaar, deur die verminderdesaldo-metode te gebruik. (4)
- 7.2.2 Die inflasiekoers vir die koste van die nuwe masjinerie is 6,3% p.j. oor die 5 jaar. Wat sal die nuwe masjinerie aan die einde van 5 jaar kos? (2)
- 7.2.3 Die maatskappy het 'n delgingsfonds begin en die eerste inbetaling in hierdie fonds gemaak op die dag toe die ou masjinerie gekoop is. Die laaste inbetaling is gemaak drie maande voordat die nuwe masjinerie aan die einde van die 5 jaar aangekoop is. Die rente verdien op die delgingsfonds was 10,25% p.j., maandeliks saamgestel. Die geld in die delgingsfonds en die R180 000 uit die verkoop van die ou masjinerie is gebruik om vir die nuwe masjinerie te betaal.
- Bereken die maandelikse inbetaling in die delgingsfonds. (5)  
[15]

**STATISTIEK EN REGRESSIE****Maatstawwe van Sentrale Neiging vir Ongegroepeerde Data**

$\text{Gemiddelde} = \frac{\text{som van al die waardes}}{\text{totale aantal waardes}}$ $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$	Waar: $\bar{x}$ = gemiddelde $\sum x$ = som van al die waardes $n$ = aantal waardes
---	--

**Modus**

Die modus is die waarde/getal wat die mees gereeld in datastel voorkom.

**Mediaan**

Die mediaan is die middel getal in die datastel. Posisie van die mediaan =  $\frac{1}{2}(n+1)$

*N.B Data moet in stygende volgorde rangskik word voordat die mediaan bepaal word.*

**Omvang as 'n Maatstaf van Verspreiding**

*Omvang = Grootste Waarde – Kleinste Waarde*

**Maatstawwe van Sentrale Neiging vir Gegroepeerde Data**

<b>Beraamde Gemiddelde</b> $= \frac{\sum f \cdot x_i}{\sum f}$	$f \rightarrow$ frekwensie $x_i \rightarrow$ die klas middelpunt  Berekening van $x_i$ $x_i = \frac{1}{2}(\text{onderste klaslimiet} + \text{boonste klaslimiet})$
<b>Modale Klas</b>	Die klas met die hoogste frekwensie

**Klas met Mediaan**

- Posisie van mediaan vir gegroepeerde data  $\rightarrow \frac{1}{2}n$
- Berekening van klas met mediaan  $\rightarrow$  tel die frekwensies van bo tot die klas met die mediaan te vind.:

Time(hours)	Frequency
$0 \leq x < 1$	5
$1 \leq x < 2$	9
$2 \leq x < 3$	12
$3 \leq x < 4$	6
$n = \sum f = 32$	

The median lies here

5 values  
14 values  
26 values

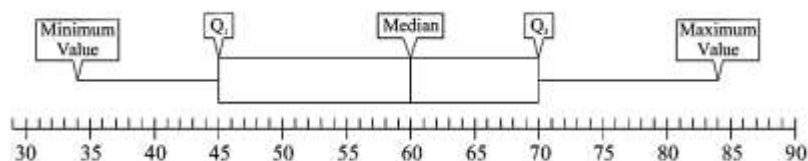
N.B posisie van mediaan  $= \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(32) = 16$

**Vyf-getal-opsomming en Mond-en-Snordigram****VYF GETAL OPSOMMING**

1. Minimum-waarde
2. Onderste-kwartiel ( $Q_1$ )
3. Mediaan ( $Q_2$ )
4. Boonste-kwartiel ( $Q_3$ )
5. Maksimum-waarde

**MOND-EN-SNORDIAGRAM**

'n Mond-en-Snordigram is 'n visuele voorstelling van die vyf-getal-opsomming.

**Identifisering van Uitskieters**

- Enige data item wat:

**Minder** is as  $Q_1 - 1,5 \times \text{IKW}$  **OF** **Meer** is as  $Q_3 + 1,5 \times \text{IKW}$ ,  
is 'n uitskieter.

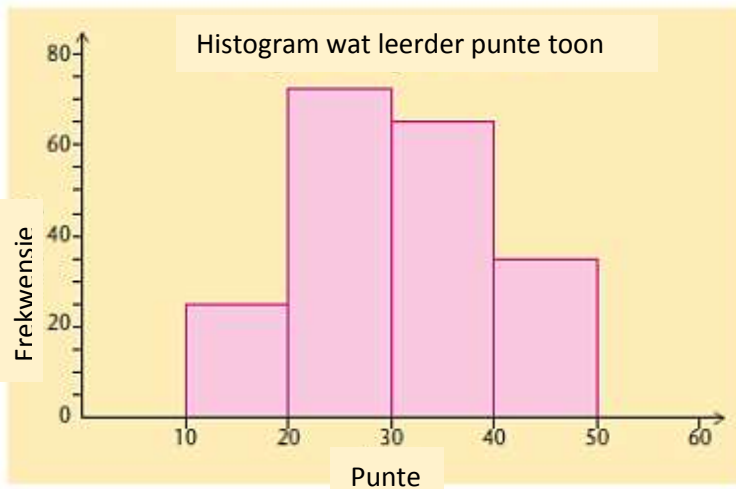


## Histogramme

'n Histogram gee 'n visuele interpretasie van **GEGROEPEERDE DATA**. Dit is soortgelyk aan 'n staafgrafiek, maar daar is **GEEN** gapings/spasies tussen die stawe nie.

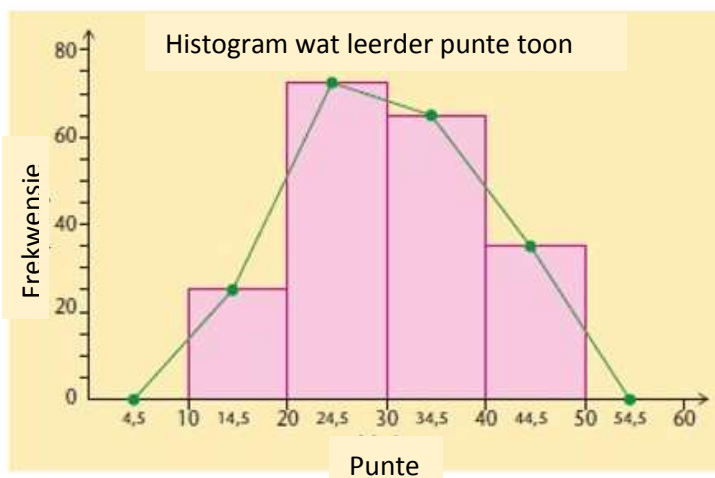
Vir 'n HISTOGRAM – SLUIT DIE VOLGENDE IN.

- Titel aan bokant om te beskryf wat die histogram voorstel.
- Groep/Klas intervalle op die  $x$ -as
- Frekwensie op die  $y$ -as
- Stawe met geen gapings tussen-in nie

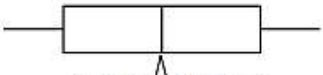

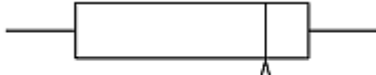
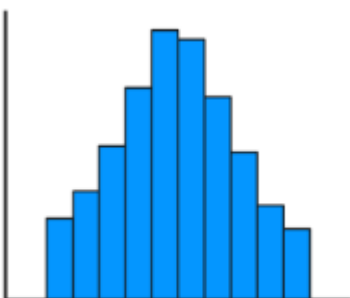
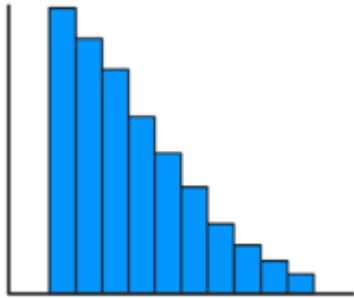
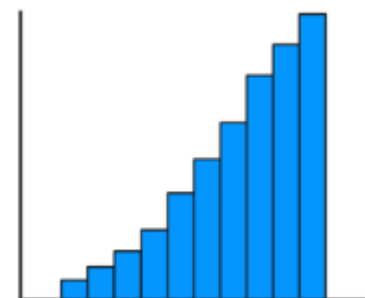
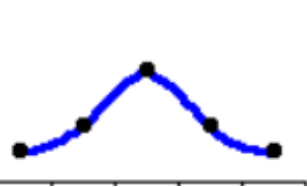
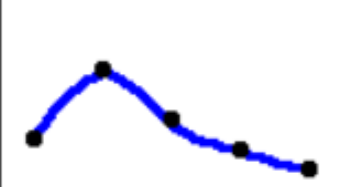
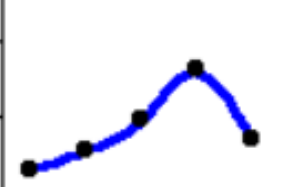


## Frekwensie Veelhoeke

Word geteken vanaf 'n HISTOGRAM deur die middelpunte van die bokant van die kolomme van die histogram te verbind. By die eindpunte, verleng die lyn na die middelpunte van die klas onder laer waardes en die middelpunt van die klas bo die boonste waarde om  $x$ -as te raak. (**ge-anker**)



## Verspreiding van die Data

Simmetries	Positief Skeef (Skeef na Regs)	Negatief Skeef (Skeef na Links)
 <p>Mediaan in die middel van die "mond" en die snorre is dieselfde.</p>	 <p>Mediaan is nader aan <math>Q_1</math></p>	 <p>Mediaan is nader aan <math>Q_3</math></p>
		
		
Gemiddelde = Mediaan	Gemiddelde > Mediaan	Gemiddelde < Mediaan



**Ogiewe (Kumulatiewe Frekwensie Kurwes)**

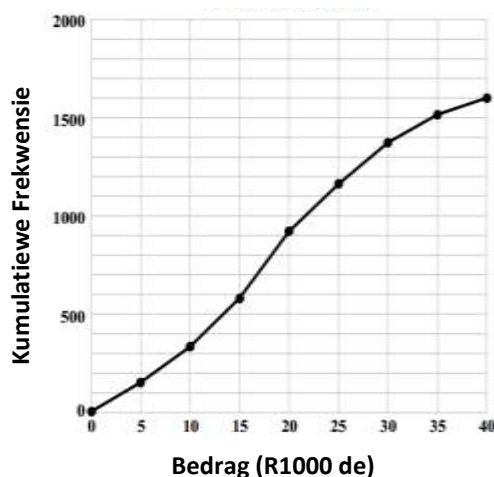
Om die **kumulatiewe frekwensie** te vind,

- Tel die frekwensies op soos jy op die frekwensie tabel af gaan.
- Die laaste waarde van die **kumulatiewe frekwensie** moet gelyk wees aan die som van al die frekwensies.

Onthou altyd wanneer jy 'n kumulatiewe frekwensie kurwe teken dat die punte wat afgesteek moet word is die boonste-klas grens teenoor die kumulatiewe frekwensie.

Bedrag ge-eis (R1000 de)	Boonsteklas Grens	Aantal Eise (frekwensie)	Kumulatiewe Frekwensie	Punte om af te steek
Amount Claimed (R1000s)	Upper Class Boundary	No. of Claims (frequency)	Cumulative Frequency	Points to Plot
	0	0	0	(0 ; 0)
$0 < x \leq 5$	5	150	150	(5 ; 150)
$5 < x \leq 10$	10	190	340	(10 ; 340)
$10 < x \leq 15$	15	250	590	(15 ; 590)
$15 < x \leq 20$	20	320	910	(20 ; 910)
$20 < x \leq 25$	25	260	1170	(25 ; 1170)
$25 < x \leq 30$	30	210	1380	(30 ; 1380)
$30 < x \leq 35$	35	140	1520	(35 ; 1520)
$35 < x \leq 40$	40	80	1600	(40 ; 1600)

**“Worry Less” Versekerings Maatskappy**  
Eise vir 2007



**Variansie en Standaardafwyking van Ongegroepeerde Data**

- Standaardafwyking is 'n maatstaf van verspreiding (verspreiding van data) rondom die gemiddelde.
- Standaardafwyking =  $\sqrt{\text{Variansie}}$ 
  - Daarom is, Variansie die  $(\text{standaardafwyking})^2$

Ons gebruik die volgende simbool vir standaardafwyking  $\rightarrow \sigma$

**N.B Gebruik altyd 'n sakrekenaar om variansie of standaardafwyking te bereken**

**Interpretasie van Standaardafwyking**

- Hoe groter die standaardafwyking  $\rightarrow$  Hoe meer is die data versprei
- Hoe kleiner die standaardafwyking  $\rightarrow$  Hoe minder is die data versprei
- Een Standaardafwyking Interval  $\rightarrow (\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma)$
- Twee Standaardafwyking Interval  $\rightarrow (\bar{x} - 2\sigma; \bar{x} + 2\sigma)$

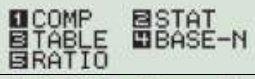
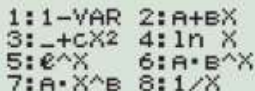


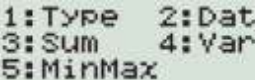
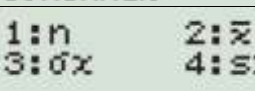
***Voorbeeld (Berekening van gemiddelde en standaardafwyking (Ongegroepeerde data))***

Gegee die data in die tabel hieronder, bepaal die gemiddelde en standaardafwyking:

$x$	2	5	7
-----	---	---	---

**Oplossing:**

In die volgende stappe gebruik ons 'n sakrekenaar: **CASIO fx-82ZA PLUS II**

<b>Stap 1</b>	Druk <b>Mode</b> knoppie	
<b>Stap 2</b>	Druk nommer <b>2</b> vir <b>STAT</b>	
<b>Stap 3</b>	Kies <b>1-VAR</b> deur nommer <b>1</b> te druk	
<b>Stap 4</b>	In die X-kolom, tik alle x-waardes in, een na die ander deur = te druk na elke invoer.	
<b>Stap 5</b>	Druk die <b>AC</b> knppie $\rightarrow$ Druk die <b>SHIFT</b> knoppie $\rightarrow$ druk nommer <b>1</b>	
<b>Stap 6</b>	Kies <b>Var</b> deur die nommer <b>4</b> te druk	
<b>Stap 7</b>	Druk die nommer <b>2</b> gevolg deur = om die gemiddelde te kry en druk die nommer <b>3</b> gevolg deur = om die standaardafwyking te kry. <b>N.B Nadat elke waarde gekry is , moet stappe 5 – 6 herhaal word om die waarde om die waarde in stap 7 te kry. Druk die AC knoppie na elke waarde gekry is.</b>	Gemiddelde = 4,67 Standaardafwyking = 2,05

**N.B om terug te gaan na die normale (Comp. mode), druk MODE knoppie gevolg deur die nommer 1**

**Voorbeeld (Berekening van gemiddelde en standaardafwyking (Gegroepeerde data))**

Gegee die data in die tabel hieronder, bepaal die beraamde gemiddelde en die standaardafwyking:

Klas	Frekwensie
$5 < x \leq 10$	4
$10 < x \leq 15$	5
$15 < x \leq 20$	8

**Oplossing:**

Klas	Frekwensie	$x_i$ (klas middelpunt)
$5 < x \leq 10$	4	7,5
$10 < x \leq 15$	5	12,5
$15 < x \leq 20$	8	17,5

In die volgende stappe word 'n sakrekenaar gebruik: **CASIO fx-82ZA PLUS II**

<b>Stap 1</b>	Omdat ons met gegroepeerde data werk, moet on seers die frekwensie funksie soos volg aan skakel Druk <b>SHIFT</b> → <b>MODE</b> → <b>Down Arrow</b> (vanaf <b>REPLAY</b> knoppie) → Kies <b>STAT</b> deur <b>3</b> te druk → <b>B</b> Choose <b>ON</b> deur <b>1</b> te druk.	
<b>Stap 2</b>	Druk <b>MODE</b> → Kies <b>STAT</b> deur <b>2</b> te druk	1:1-VAR 2:A+BX 3:Y+CX <sup>2</sup> 4:1n X 5:e^X 6:A*B^X 7:A*X^B 8:1/X
<b>Stap 3</b>	Kies <b>1-VAR</b> deur nommer <b>1</b> te druk	STAT 1 X FREQ
<b>Stap 4</b>	In die X-kolom, tik al die klas middelpunt waardes in, een na die ander deur = te druk na elke waarde. Skuif dan na die Frekwensie kolom en tik ooreenkomstige frekwensies in.	STAT 1 X 7,5 FREQ 4 2 12,5 5 3 17,5
<b>Stap 5</b>	Druk <b>AC</b> knoppie → Druk <b>SHIFT</b> knoppie → Druk die nommer <b>1</b>	1:Type 2:Data 3:Sum 4:Var 5:MinMax
<b>Stap 6</b>	Kies <b>Var</b> deur die nommer <b>4</b> knoppie te druk	1:n 2: $\bar{x}$ 3: $\sigma x$ 4:sx
<b>Stap 7</b>	Druk die nommer <b>2</b> gevolg deur die = om die geskatte gemiddelde te kry en druk die nommer <b>3</b> gevolg deur die = om die geskatte standaardafwyking te kry. <b>N.B</b> Nadat elke waarde gekry is, moet jy stappe 5 – 6 herhaal om die waarde in stap 7 te kry. Druk die <b>AC</b> knoppie nadat elke waarde gekry is.	Geskatte Gemiddelde = 13,68 Geskatte Standaardafwyking = 4,03

**N.B** om die frekwensie af te skakel, volg Stap 1 (maar kies 2 om AF te skakel)

**N.B** om terug tot die “normal (Comp.) mode” te gaan, drul **MODE** knoppie gevolg deur die nommer **1**

**Uitgewerkte Voorbeeld 1(November 2008 V9)****VRAAG 9**

Die tyd geneem, in minute, deur 'n groep van 10 hardlopers om 'n 5 kilometer-wedloop af te lê, word hieronder gegee:

18    21    16    24    28    20    22    29    19    23

- 9.1      Bereken die gemiddelde tyd wat nodig is om die wedloop te voltooi. (2)
- 9.2      Bereken die standaardafwyking van die tyd benodig om die wedloop te voltooi. (4)  
(Gebruik die formule op die inligtingsblad.)
- 9.3      Hoeveel hardlopers het die wedloop voltooi binne een standaardafwyking vanaf die gemiddelde? (2)  
[8]

**Oplossing:**

$$9.1 \text{ Gemiddelde} = \frac{220}{10} = 22 \text{ minute}$$

$$9.2 \quad \sigma = 3,95$$

9.3 Een standaardafwyking vanaf die gemiddelde is in die interval

$(22 - 3,95 ; 22 + 3,95)$  wat  $(18,05 ; 25,95)$  is.

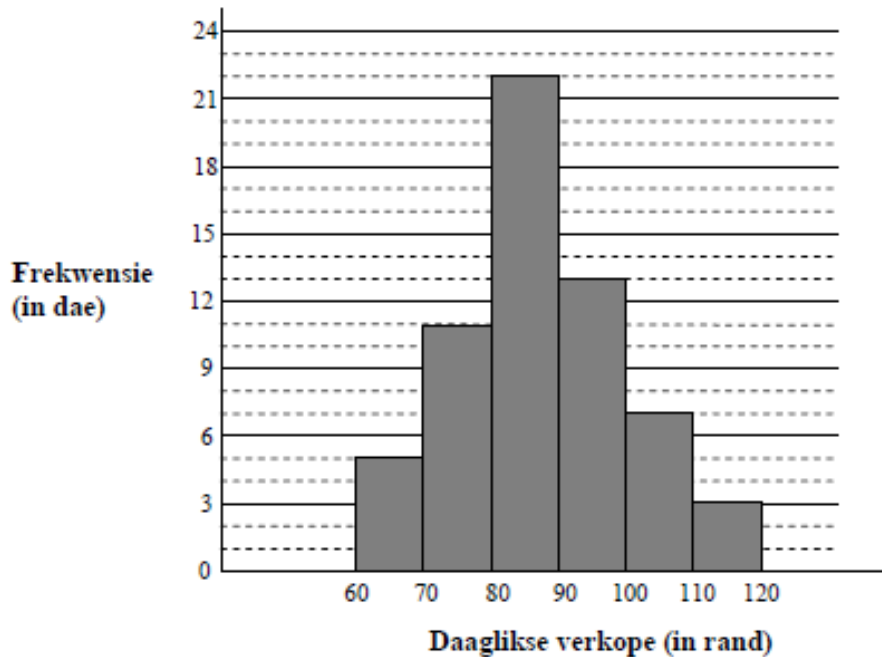
$\therefore$  6 hardlopers het die wedloop binne een standaardafwyking vanaf die gemiddelde voltooi.

(Lys van tye: 21, 24, 20, 22, 19, 23)

## Uitgewerkte Voorbeeld 2 (November 2008 V10)

### VRAAG 10

'n Straatverkoper het rekord gehou van die verkope vir November en Desember 2007. Die daaglikse verkope in rand word in die histogram hieronder gewys.



- 10.1 Op DIAGRAMVEL 3, voltooi die kumulatiewe frekwensietabel vir die verkope van November en Desember. (3)
- 10.2 Skets 'n ogief vir die verkope van November en Desember op DIAGRAMVEL 3. (3)
- 10.3 Gebruik jou ogief om die mediaanwaarde vir die daaglikse verkope te bepaal. Verduidelik hoe jy jou antwoord verkry het. (1)
- 10.4 Skat die interval van die boonste 25% van die daaglikse verkope. (2)
- [9]

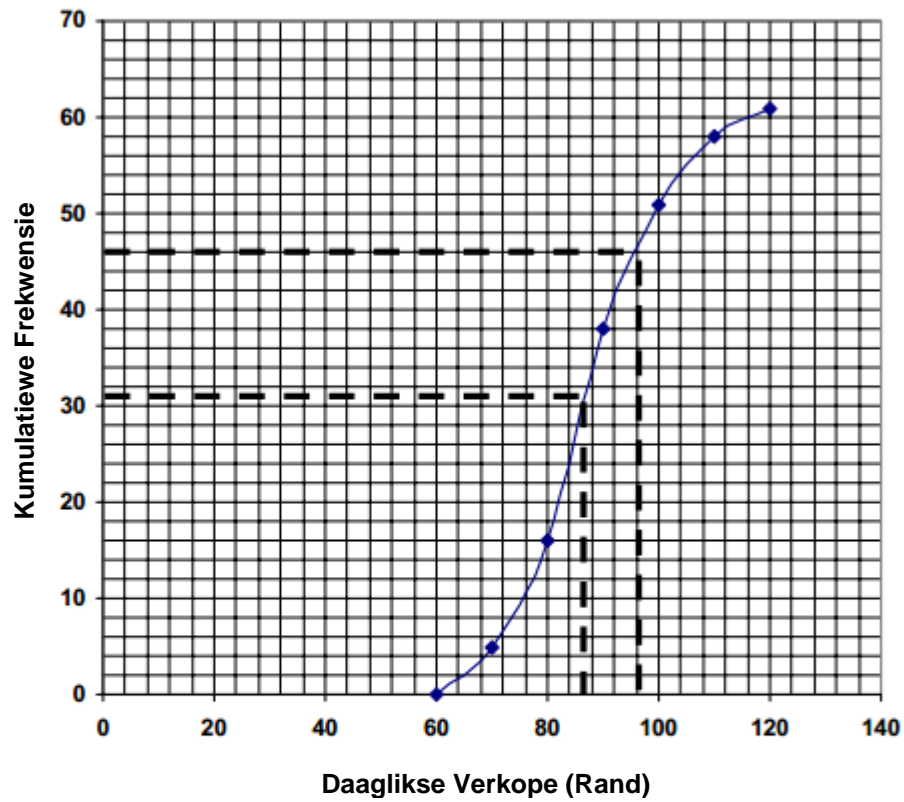
### Oplossing:

10.1

Daaglikse Verkope (in Rand)	Frekwensie	Kumulatiewe Frekwensie
$60 \leq \text{rand} < 70$	5	5
$70 \leq \text{rand} < 80$	11	16
$80 \leq \text{rand} < 90$	22	38
$90 \leq \text{rand} < 100$	13	51
$100 \leq \text{rand} < 110$	7	58
$110 \leq \text{rand} < 120$	3	61

10.2

Verkope vir November en Desember 2007



10.3

Mediaan = R 87  
(Aanvaar antwoorde tussen 84 en 90)

10.4

$$R96 \leq \text{verkope} \leq R120$$

**Regressielyn (Lyn van beste passing of Die kleinste kwadrate-lyn)**

Formule om die voorspelde  $y$  –waarde ( $\hat{y}$ ) te vind:  $\hat{y} = a + bx$

**N.B Gebruik 'n sakrekenaar om die waardes van  $a$  en  $b$  te vind.**

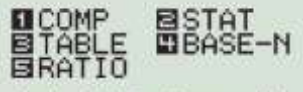
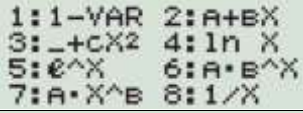
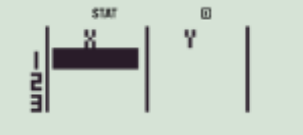
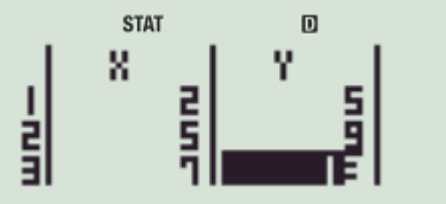
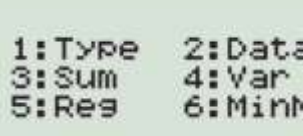
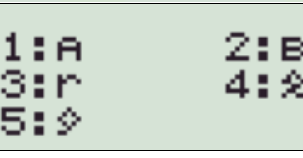
***Voorbeeld (Bepaling van die vergelyking van die regressielyn)***

Gegee die data in die tabel hieronder, bepaal die vergelyking van die lyn van beste passing:

$x$	2	5	7
$y$	5	9	13

***Oplossing:***

In die volgende stappe word 'n sakrekenaar gebruik: **CASIO fx-82ZA PLUS II**

<b>Stap 1</b>	Druk <b>Mode</b> knoppie	
<b>Stap 2</b>	Druk nommer <b>2</b> vir <b>STAT</b>	
<b>Stap 3</b>	Kies opsie <b>2: A+BX</b> deur nommer <b>2</b> te druk	
<b>Stap 4</b>	In die X-kolom, tik al die x-waardes, een na die ander in deur = te druk na elke waarde. Skuif dan na die Y-kolom, tik al die y-waardes, een na die ander in deur = te druk na elke waarde.	
<b>Stap 5</b>	Druk <b>AC</b> knoppie → Druk <b>SHIFT</b> knoppie → Druk die nommer <b>1</b>	
<b>Stap 6</b>	Kies <b>5:Reg</b> deur die nommer <b>5</b> te druk	
<b>Stap 7</b>	Druk die nommer <b>1</b> gevolg deur = om die waarde van <b>A</b> te kry, en druk dan die nommer <b>2</b> gevolg deur = om die waarde van <b>B</b> te kry. Jy kan ook die waarde van <b>r</b> (korrelasie-koëffisiënt) kry. <b>N.B Nadat elke waarde gekry is, moet jy stappe 5 – 6 herhaal om die waarde in stap 7 te kry. Druk AC knoppie nadat jy elke waarde kry.</b>	$A = 1,63$ $B = 1,58$ $r = 0,99$

Die vergelyking van die lyn van beste passing is dan:  $\hat{y} = 1,63 + 1,58x$

**N.B om terug na die “normal (Comp.) mode” te gaan, druk MODE knoppie gevolg deur nommer 1**



**Om die lyn van beste passing te teken.*****Benadering/metode 1***

Vervang enige twee  $x$  –waardes vanaf die tabel om die voorspelde  $y$  –waardes te kry. Steek die punte af en verbind hulle.

N.B Verseker dat jou lyn lank genoeg is om die datastel te dek.

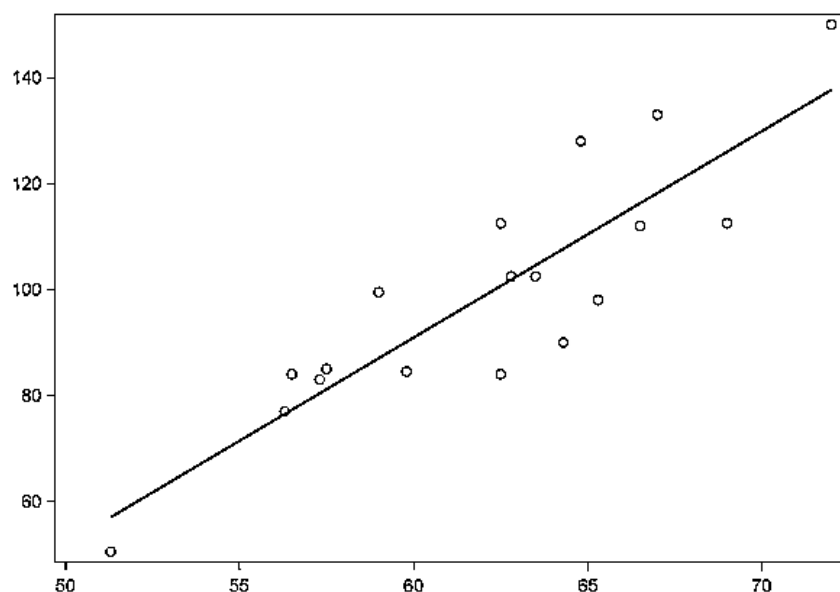
***Benadering/metode 2***

Bepaal die gemiddelde punt en die  $y$ -afsnit, verbind dan die twee punte.

Om die gemiddelde punt te bepaal, gebruik die voorbeeld op die vorige bladsy, volg stappe 1 – 5, en daarna die volgende stappe:

<b>Stap 6</b>	Kies <b>4:Var</b> deur die nommer <b>4</b> te druk	<div>1:n      2:<math>\bar{x}</math></div> <div>3:Ox      4:sx</div> <div>5:y      6:Oy</div> <div>7:sy</div>
<b>Stap 7</b>	Druk die nommer <b>2</b> gevolg deur = om die gemiddelde vir $x$ te kry, en druk dan die nommer <b>5</b> gevolg deur = om die gemiddelde vir $y$ te kry. <b>N.B Nadat elke waarde gekry word, moet jy stappe 5 – 6 herhaal om die waarde in stap 7 te kry. Druk die AC knoppie nadat jy elke waarde kry.</b>	$\bar{x} = 4,67$ $\bar{y} = 9$ $\therefore$ <b>gemiddelde punt is (4,67 ; 9)</b>

**N.B Wanneer die lyn van beste passing geteken word, verseker dat die lyn lank genoeg is om die rooster te dek, sien hieronder:**

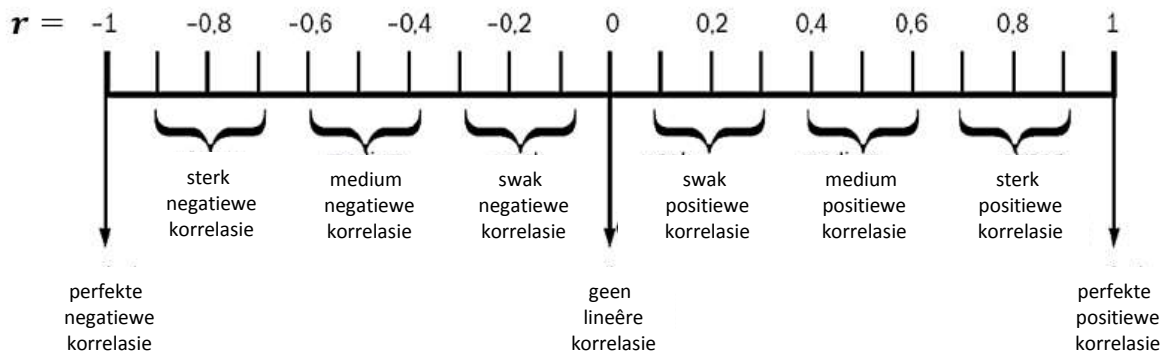
**Lineêre Regressie**



## Korrelasie Koëffisiënt

- Korrelasie koëffisiënt ( $r$ ) dui die sterkte van die verhouding tussen die twee veranderlikes aan.
- Gebruik sakrekenaar om  $r$  te bereken (*Sien voorbeeld op bladsy 80*).
- $-1 \leq r \leq 1$

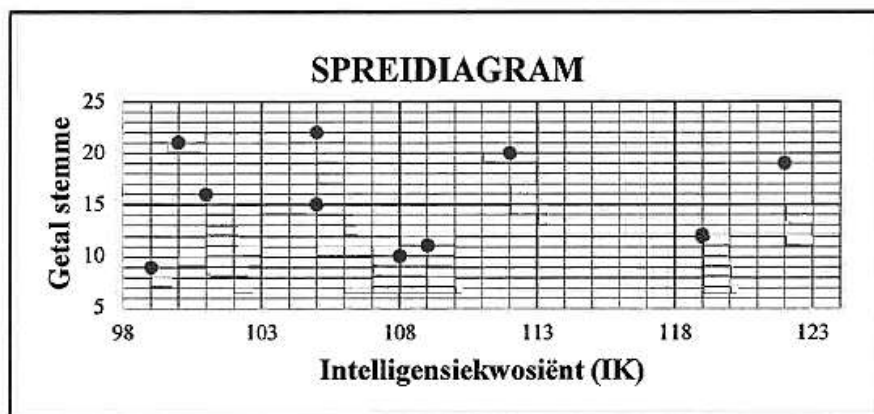
## Lees/Beskrywing van Korrelasie Koëffisiënt



## Uitgewerkte Voorbeeld (November 2022 V1)

### VRAAG 1

Die matriekklas van 'n sekere hoërskool moes vir die voorsitter van die VRL (verteenwoordigende raad van leerders) stem. Die spreidiagram hieronder toon die IK (intelligensiëkwosiënt) van die 10 leerders wat die meeste stemme gekry het en die getal stemme wat hulle gekry het.



Voor die verkiesing is die gewildheid van elk van hierdie tien leerders bepaal en 'n gewildheidspunt (uit 100) is aan elkeen toegeken. Die gewildheidspunt en die getal stemme van dieselfde 10 leerders wat die meeste stemme gekry het, word in die tabel hieronder getoon.

Gewildheidspunt (x)	32	89	35	82	50	59	81	40	79	65
Getal stemme (y)	9	22	10	21	11	15	20	12	19	16

- 1.1 Bereken die:
- 1.1.1 Gemiddelde getal stemme wat hierdie 10 leerders gekry het (2)
- 1.1.2 Standaardafwyking van die getal stemme wat hierdie 10 leerders gekry het (1)
- 1.2 Die leerders wat minder stemme as een standaardafwyking onder die gemiddelde gekry het, is nie vir 'n onderhoud genooi nie. Hoeveel leerders is genooi? (2)
- 1.3 Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate-regressielyn vir die data wat in die tabel gegee is. (3)
- 1.4 Voorspel die aantal stemme wat 'n leerder met 'n gewildheidspunt van 72 sal ontvang. (2)
- 1.5 Gebruik die spreidiagram en tabel hierbo om 'n rede te verskaf waarom:
- 1.5.1 IK nie 'n goeie aanduiding is van die aantal stemme wat 'n leerder kan ontvang nie (1)
- 1.5.2 Die voorspelling in VRAAG 1.4 betroubaar is (1)
- [12]

### Oplossing:

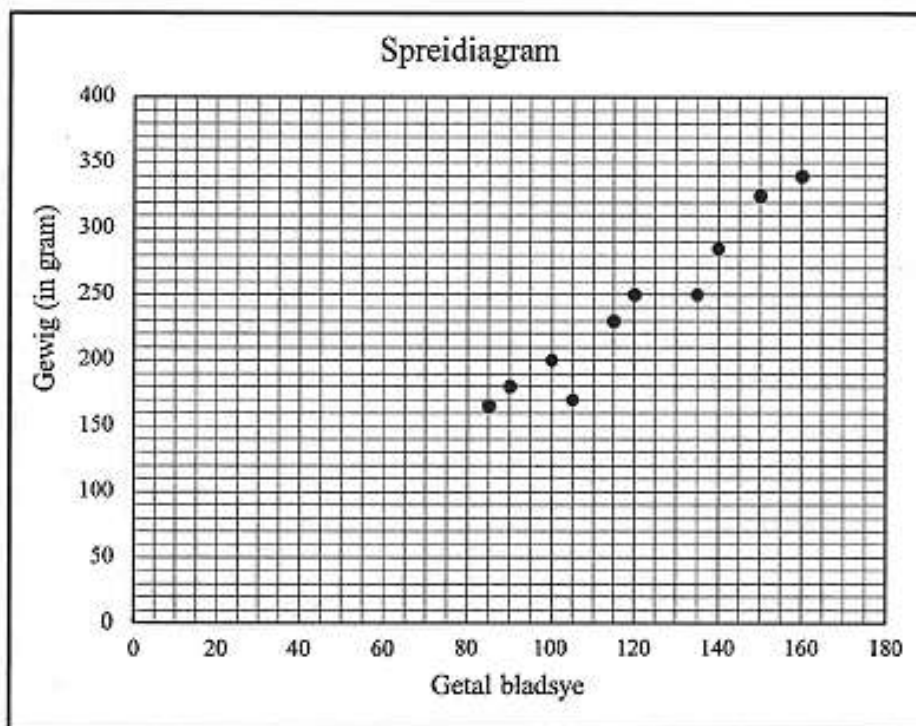
1.1.1	$\bar{y} = \frac{155}{10}$ $= 15,5$
1.1.2	$SD = 4,59$
1.2	$\bar{y} - SD$ $= 15,5 - 4,59$ $= 10,91$ $\therefore 10 - 2 = 8$ learners
1.3	$a = 1,7709...$ $b = 0,2243...$ $\hat{y} = 1,77 + 0,22x$
1.4	$\hat{y} = 1,77 + 0,22(72)$ $= 17,61$ $\approx 18$ votes <b>OR/OF</b> $\hat{y} = 17,92 \approx 18$ votes

1.5.1	Points are all scattered therefore low correlation and unrealistic prediction./Punte is versprei daarom 'n lae korrelasie en onrealistiese voorspelling.
1.5.2	$r = 0,98$ /correlation very strong/korrelasie baie sterk $\therefore$ a reliable prediction/'n betroubare voorspelling

**AKTIWITEITE****Statistiek en Regressie***(Mei/Junie 2024)***VRAAG 1**

Die getal bladsye in tien A4-boeke en hulle ooreenstemmende gewig (in gram) is in die tabel hieronder gegee. Die data word ook in die spreidiagram verteenwoordig.

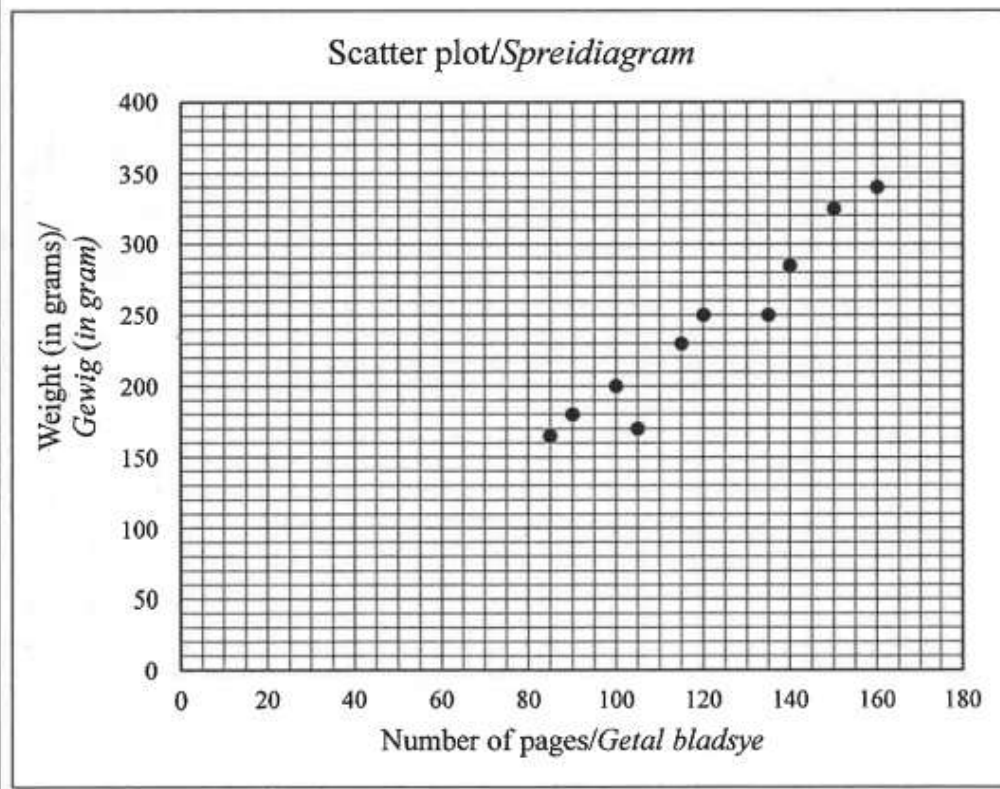
<b>Getal bladsye (x)</b>	85	150	100	120	90	140	135	105	115	160
<b>Gewig (in gram) (y)</b>	165	325	200	250	180	285	250	170	230	340



- 1.1 Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate-regressielyn. (3)
  - 1.2 Trek die kleinste kwadrate-regressielyn op die spreidiagram in die ANTWOORDEBOEK. (2)
  - 1.3 Voorspel die gewig van 'n A4-boek wat 110 bladsye bevat. (2)
  - 1.4 Bereken die persentasie toename in gewig tussen 'n boek met 110 bladsye en 'n boek met 130 bladsye. (3)
- [10]**

## BEANTWOORD VRAAG 1.2 HIER:

1.2





**VRAAG 2**

Vyftig atlete moet toegang tot geskikte oefenfasiliteite hê. Die tabel hieronder toon die afstande, in km, wat hulle moet ry om toegang tot geskikte oefenfasiliteite te kry.

AFSTAND ( $x$ km)	GETAL ATLETE
$0 \leq x < 5$	3
$5 \leq x < 10$	7
$10 \leq x < 15$	20
$15 \leq x < 20$	12
$20 \leq x < 25$	5
$25 \leq x < 30$	3

- 2.1 Voltooi die kumulatiewefrekwensie-kolom wat in die tabel in die ANTWOORDEBOEK verskaf word. (2)
- 2.2 Op die rooster wat in die ANTWOORDEBOEK verskaf word, teken 'n kumulatiewefrekwensie-kromme (ogief) om die data hierbo te verteenwoordig. (3)
- 2.3 Bereken die interkwartielvariasiewydte (IKR) van die data hierbo. (2)
- 2.4 Die gesinne van 4 van die atlete hierbo wat tussen 15 en 20 km vanaf 'n geskikte oefenfasiliteit woon, besluit om 10 kilometer nader aan die fasiliteit te trek. In watter interval sal die getal atlete toeneem? (1)
- 2.5 Bereken die geskatte gemiddelde afstand wat die vyftig atlete moet ry nadat die 4 gesinne 10 kilometer nader aan die fasiliteit getrek het. Toon ALLE berekeninge duidelik. (3)
- [11].

**BEANTWOORD VRAAG 2.1 EN 2.2 HIER:**

2.1

Distance/ <i>Afstand</i> ( $x$ km)	Number of athletes/ <i>Getal atlete</i>	Cumulative frequency/ <i>Kumulatiewe frekwensie</i>
$0 \leq x < 5$	3	
$5 \leq x < 10$	7	
$10 \leq x < 15$	20	
$15 \leq x < 20$	12	
$20 \leq x < 25$	5	
$25 \leq x < 30$	3	

2.2

Ogive/Ogief

The graph is a coordinate plane with a grid. The vertical axis (y-axis) is labeled 'Cumulative frequency / Kumulatiewe frekwensie' and has major tick marks every 5 units from 0 to 55. The horizontal axis (x-axis) is labeled 'Distance / Afstand (in km)' and has major tick marks every 5 units from 0 to 35. The grid consists of small squares, with each major tick mark on the y-axis corresponding to 10 small squares and each major tick mark on the x-axis corresponding to 10 small squares.

*(Mei/Junie 2023)***VRAAG 1**

- 1.1 Die eienaar van 'n klein maatskappy wil vasstel of advertensies in 'n streekkoeurant effektief is. Die tabel hieronder toon die bedrag wat aan advertensies spandeer is en die ooreenstemmende verkoopsyfers vir die laaste 9 jaar.

<b>Bedrag aan advertensies spandeer (in rand) (x)</b>	21 300	23 700	24 800	30 540	24 100	40 680	22 400	35 250	29 110
<b>Verkope (in rand) (y)</b>	311 500	326 700	349 200	470 000	316 100	564 200	314 000	487 300	392 900

- 1.1.1 Bepaal die vergelyking van die kleinstekwadrateregressielyn vir die data. (3)
- 1.1.2 Voorspel die verkope vir 'n jaar waarin die maatskappy R28 500 aan advertensies sal spandeer. (2)
- 1.1.3 Skryf die korrelasiekoëffisiënt van die data neer. (1)
- 1.1.4 Beskryf die verwantskap tussen die bedrag wat aan advertensies in die streekkoeurant spandeer is en die verkope van hierdie maatskappy. (1)
- 1.2 Die wins wat die klein maatskappy gedurende dieselfde 9 jaar gemaak het, word in die tabel hieronder gegee.

<b>Wins (in rand)</b>	110 750	107 376	152 338	244 480	144 021	275 994	121 900	207 636	187 700
-----------------------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

- 1.2.1 Bereken die gemiddelde wins wat gedurende die 9 jaar gemaak is. (2)
- 1.2.2 Skryf die standaardafwyking vir die data neer. (1)
- 1.2.3 Bepaal die aantal jaar waarin die maatskappy 'n wins wat meer as een standaardafwyking van die gemiddelde is, gemaak het. (2)

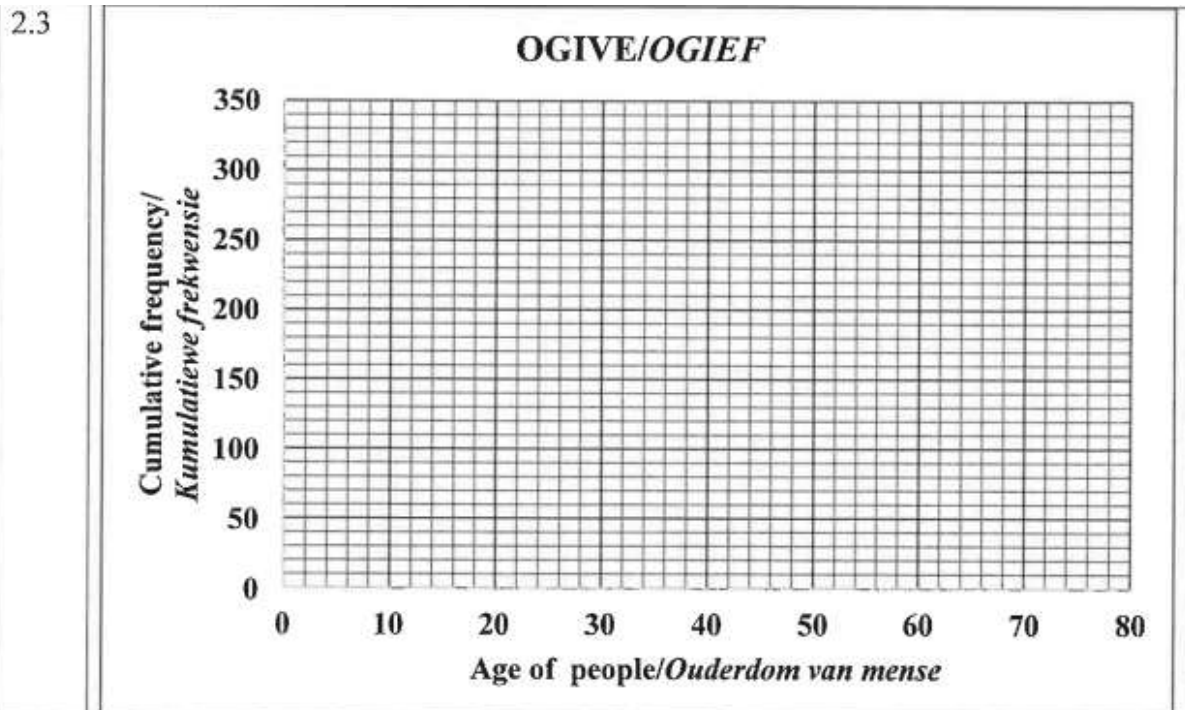
**[12]**

**VRAAG 2**

Die ouderdomme van die mense wat 'n musiekkonsert bygewoon het, is in die tabel hieronder opgesom.

OUDERDOM	GETAL MENSE
$5 < x \leq 15$	20
$15 < x \leq 25$	25
$25 < x \leq 35$	60
$35 < x \leq 45$	90
$45 < x \leq 55$	55
$55 < x \leq 65$	40
$65 < x \leq 75$	30

- 2.1 Skryf die modale klas van die data neer. (1)
- 2.2 Hoeveel mense het die musiekkonsert bygewoon? (1)
- 2.3 Skets 'n kumulatiewefrekwensie-grafiek (ogief) op die rooster wat in die ANTWOORDEBOEK voorsien word, om die data hierbo te verteenwoordig. (4)
- 2.4 Gebruik die kumulatiewefrekwensie-grafiek om die mediaanouderdom van die mense wat die musiekkonsert bygewoon het, te bepaal. (2)
- [8]**

**BEANTWOORD VRAAG 2.3 HIER:**



*(Mei/Junie 2022)***VRAAG 1**

Die tabel hieronder toon die massa (in kg) van skooltasse van 80 leerders.

MASSA (in kg)	FREKWENSIE
$5 < m \leq 7$	6
$7 < m \leq 9$	18
$9 < m \leq 11$	21
$11 < m \leq 13$	19
$13 < m \leq 15$	11
$15 < m \leq 17$	4
$17 < m \leq 19$	1

- 1.1 Skryf die modale klas van die data neer. (1)
- 1.2 Voltooi die kumulatiewefrekwensie-kolom in die tabel in die ANTWOORDEBOEK. (2)
- 1.3 Skets 'n kumulatiewefrekwensie-grafiek (ogief) vir die gegewe data op die rooster wat in die ANTWOORDEBOEK verskaf word. (3)
- 1.4 Gebruik die grafiek om die mediaanmassa vir hierdie data te bepaal. (2)
- 1.5 Die internasionale riglyn vir die massa van 'n skooltas is dat dit nie 10% van 'n leerder se liggaamsmassa moet oorskry nie.
  - 1.5.1 Bereken die benaderde gemiddelde massa van die skooltas. (2)
  - 1.5.2 Daar is gevind dat die gemiddelde massa van hierdie groep leerders 80 kg is. Met verwysing na gemiddelde massa, voldoen hierdie skooltas aan die internasionale riglyn? Motiveer jou antwoord. (2)

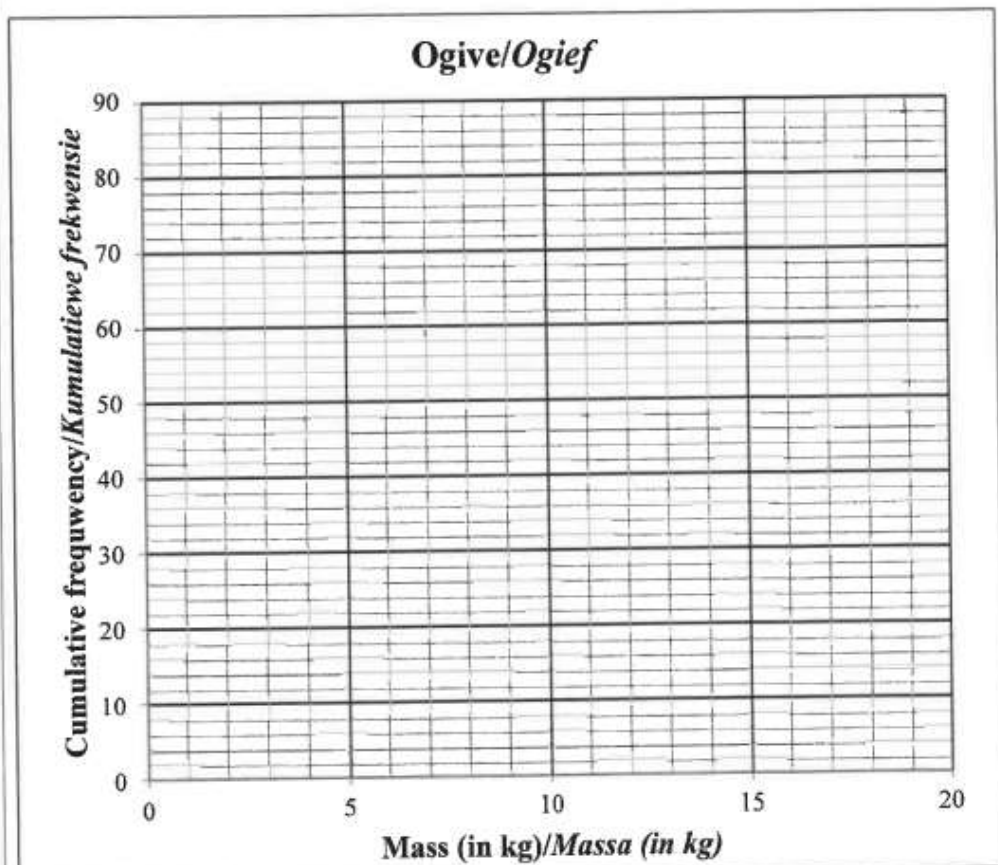
**[12]**

**BEANTWOORD VRAAG 1.2 EN 1.3 HIER:**

1.2

MASS (in kg)/ MASSA (in kg)	FREQUENCY/ FREKWENSIE	CUMULATIVE FREQUENCY/ KUMULATIEWE FREKWENSIE
$5 < m \leq 7$	6	
$7 < m \leq 9$	18	
$9 < m \leq 11$	21	
$11 < m \leq 13$	19	
$13 < m \leq 15$	11	
$15 < m \leq 17$	4	
$17 < m \leq 19$	1	

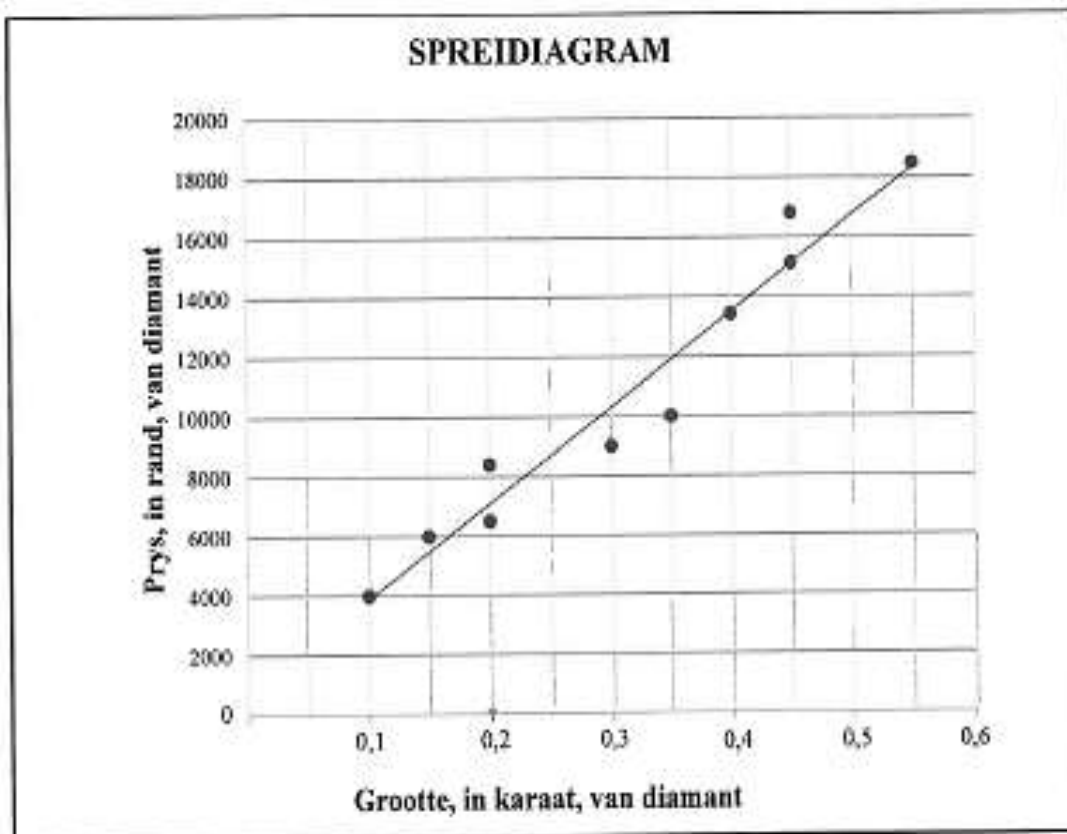
1.3



**VRAAG 2**

Die tabel hieronder toon die grootte (in karaat) en die prys (in rand) van 10 diamante wat deur 'n diamanthandelaar verkoop is. Hierdie inligting word ook in die spreidiagram hieronder getoon. Die kleinstekwadrate-regressielyn is getrek.

Grootte, in karaat, van diamant (x)	0,1	0,15	0,2	0,2	0,3	0,35	0,4	0,45	0,45	0,55
Prys, in rand, van diamant (y)	4 000	6 000	6 500	8 400	9 000	10 000	13 440	15 120	16 800	18 480



- 2.1 Bepaal die vergelyking van die kleinstekwadrate-regressielyn vir die data. (3)
- 2.2 As die handelaar 'n diamant verkoop het wat 0,25 karaat groot is, voorspel die verkoopprijs van die diamant in rand. (2)
- 2.3 Bereken die gemiddelde prysverhoging per 0,05 karaat van die diamante. (2)
- 2.4 Daar is later vasgestel dat die prys van die 0,35 karaat diamant verkeerd aangeteken is. Die korrekte prys is R11 500. Wanneer die dataset reggestel word, raak die korrelasie tussen die grootte en die prys van hierdie diamante sterker. Verduidelik die rede hiervoor deur na die gegewe spreidiagram te verwys. (1)

[8]

**ANALITIESE MEETKUNDE****Reguitlyne**

- ① Distance formula:
- Afstand formule**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- ② Midpoint formula:
- Middelpunt formule**

$$M \left( \frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Die gradiënt / helling van 'n lyn

- ③ The gradient / slope of a line:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{or} \quad \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

order is very important!  
You HAVE to use the  
same order in the numerator  
and denominator.

This line is increasing.  
It has a positive gradient.  
Hierdie lyn is stygend.  
Dit het 'n positiewe gradiënt

This line is decreasing.  
It has a negative gradient.  
Hierdie lyn is dalend.  
Dit het 'n negatiewe gradiënt

- ④ The equation of a straight line:
- Die vergelyking van 'n reguitlyn**

'n Reguitlyn se vergelyking word in hierdie vorm geskryf:

$$y = mx + c$$

gradiënt

$$y = mx + c$$

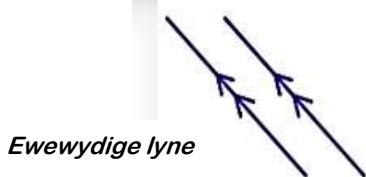
gradiënt      gradient      y-intercept  
y-afsnit

or

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

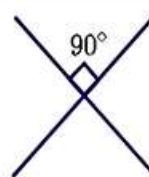
gradient  
a point on the line  
(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>)

'n punt op die lyn  
(x<sub>1</sub> ; y<sub>1</sub>)



Ewewydige lyne

Parallel Lines



Loodregte lyne

Perpendicular Lines

Ewewydige lyne

=&gt; dieselfde gradiënte

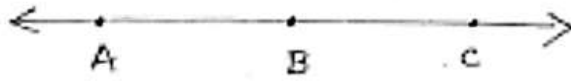
$$\therefore m_1 = m_2$$

Loodregte lyne

=&gt; Produk van gradiënte = -1

$$\therefore m_1 \times m_2 = -1$$

**Kollineêre/Saamlynige punte** → Twee of meer punte is saamlynig as al die punte op dieselfde reguitlyn lê.

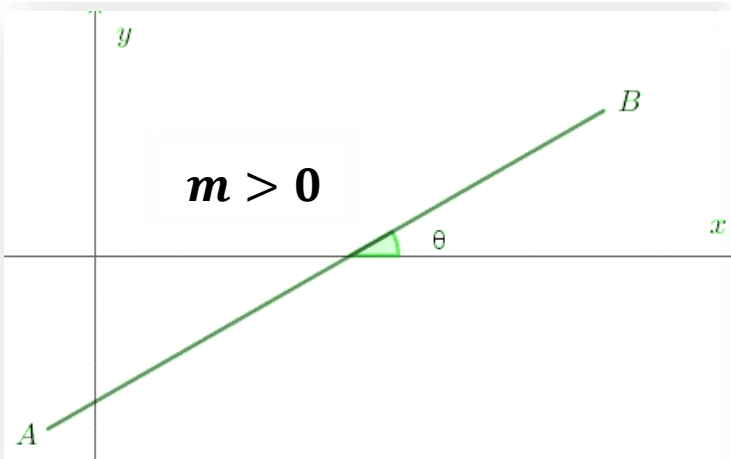


*Op hierdie lyn is A, B en C saamlynige punte*

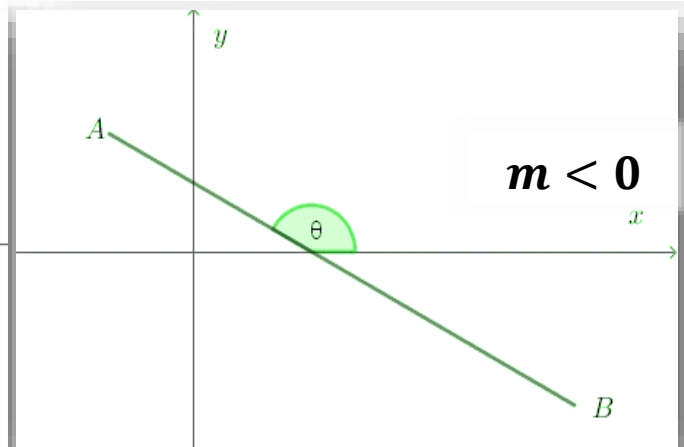
$$\therefore m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$$

**Inklinasie van 'n lyn**

$$m = \tan \theta$$



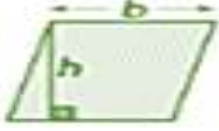
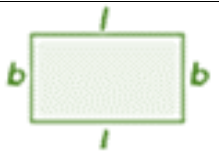
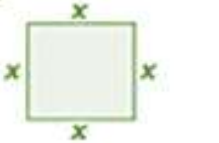
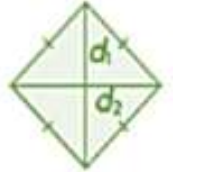

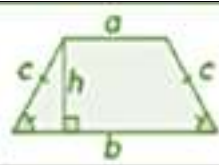
$$\theta = \tan^{-1}(m)$$



$$\theta = \tan^{-1}(m) + 180^\circ$$

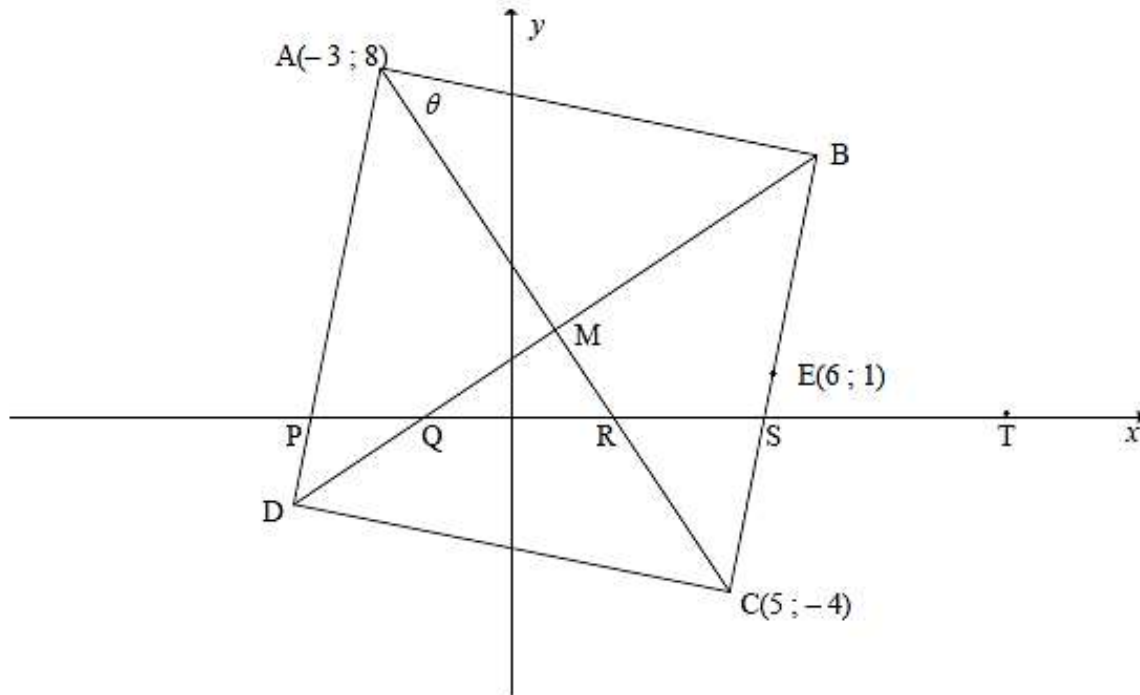


**Eienskappe van Vierhoeke**

Vierhoek	Vorm	Eienskappe	Oppervlakte
Parallelogram		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teenoorstaande sye ewewydig</li> <li>• Teenoorstaande sye gelyk</li> <li>• Teenoorstaande hoeke gelyk</li> <li>• Hoeklyne halveer mekaar</li> </ul>	$b \times h$
Reghoek		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Al die eienskappe van parallelogram</li> <li>• Alle hoeke is reghoeke</li> <li>• Hoeklyne is gelyk</li> </ul>	$l \times b$
Vierkant		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Al die eienskappe van reghoek</li> <li>• Alle sye gelyk</li> <li>• Hoeklyne halveer loodreg</li> <li>• Hoeklyne halveer die hoeke</li> </ul>	$x^2$
Ruit/Rombus		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Al die eienskappe van parallelogram</li> <li>• Alle sye is gelyk</li> <li>• Hoeklyne halveer loodreg</li> <li>• Hoeklyne halveer die hoeke</li> </ul>	$\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
Vlieër		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Twee pare aangrensende sye is gelyk</li> <li>• Een paar teenoorstaande hoeke is gelyk.</li> <li>• Een hoeklyn halveer die ander loodreg</li> <li>• Een hoeklyn halveer hoeke</li> </ul>	$\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
Trapezium		Een paar teenoorstaande sye ewewydig	$\frac{1}{2} \times (a + b) \times h$

**Uitgewerkte Voorbeeld 1 (November 2012)****VRAAG 5**

ABCD is 'n rombus met  $A(-3 ; 8)$  en  $C(5 ; -4)$ . Die hoeklyne van ABCD halveer mekaar by M. Die punt  $E(6 ; 1)$  lê op BC.



- |     |   |      |
|-----|---|------|
| 5.1 | Bereken die koördinate van M.   | (2)  |
| 5.2 | Bereken die gradiënt van BC.  | (2)  |
| 5.3 | Bepaal die vergelyking van die lyn AD in die vorm $y = mx + c$ .                  | (3)  |
| 5.4 | Bepaal die grootte van $\theta$ , dit is $\hat{BAC}$ . Toon ALLE berekeninge aan. | (6)  |
|     |   | [13] |

**Oplossing:**

Hoeklyne halveer mekaar by M

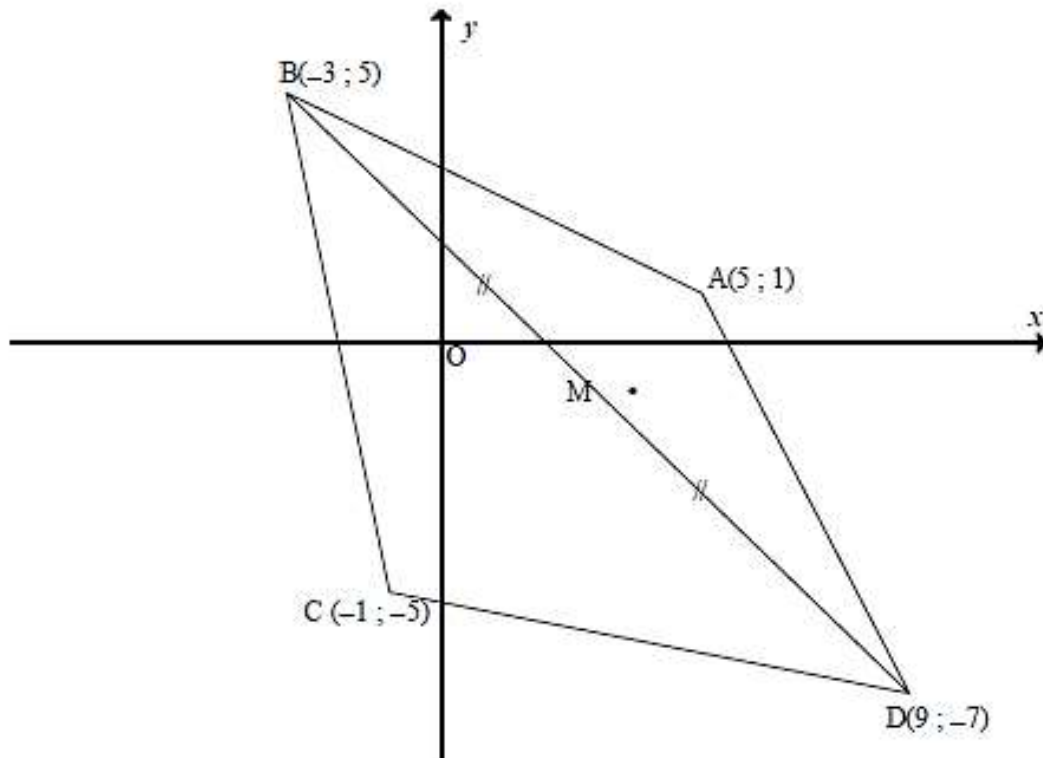
5.1	<p>Diagonals bisect each other at M:</p> $x_M = \frac{-3+5}{2} = 1 \quad ; \quad y_M = \frac{8+(-4)}{2} = 2$ <p>M(1 ; 2)</p>
5.2	$m_{BC} = \frac{1+4}{6-5}$ $m_{BC} = 5$ <p><b>OR</b></p> $m_{BC} = \frac{-4-1}{5-6}$ $m_{BC} = 5$
5.3	$y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 8 = m(x + 3)$ $m_{AD} = m_{BC} = 5$ $y - 8 = 5(x + 3)$ $y = 5x + 23$ <div style="margin-left: 200px;"> <p>Lines parallel</p> <p>Lyne ewewydig</p> </div>



5.4	<p>ABCD is a rhombus, therefore / ABCD is 'n ruit/rombus, daarom  <math>AB = BC</math>  <math>\theta = \hat{BCA} = \hat{ARS} - \hat{RSC}</math>  <math>= \hat{ARS} - \hat{BST}</math>  <math>\tan \hat{ARS} = m_{AC} = \frac{8+4}{-3-5}</math>  <math>\tan \hat{ARS} = -\frac{3}{2}</math>  <math>\hat{ARS} = 180^\circ - 56,3099\dots</math>  <math>\hat{ARS} = 123,69^\circ</math>  <math>\tan \hat{BST} = m_{BC} = 5</math>  <math>\hat{BST} = 78,69^\circ</math>  <math>\theta = \hat{BCA} = 123,69^\circ - 78,69^\circ</math>  <math>\theta = 45^\circ</math></p> <p><b>OR</b></p> <p><math>\tan \hat{ARS} = m_{AC} = \frac{8+4}{-3-5} = -\frac{3}{2}</math>  <math>\hat{ARS} = 123,69^\circ</math>  <math>\tan \hat{APR} = m_{AD} = 5</math>  <math>\hat{APR} = 78,69^\circ</math>  <math>\hat{PAR} = \hat{ARS} - \hat{APR}</math> Exterior angle of a triangle / Buitehoek van 'n driehoek  <math>= 123,69^\circ - 78,69^\circ</math>  <math>= 45^\circ</math>  <math>\theta = \hat{PAR}</math> Diagonals of the rhombus bisect  <math>= 45^\circ</math> opposite angles          Hoeklyne van die rombus/ruit          halveer die teenoorstaande hoeke</p>
-----	---

**Uitgewerkte Voorbeeld 2 (November 2009)****VRAAG 1**

ABCD is 'n vierhoek met hoekpunte  $A(5; 1)$ ,  $B(-3; 5)$ ,  $C(-1; -5)$  en  $D(9; -7)$ .



- |     |   |      |
|-----|---|------|
| 1.1 | Bereken die gradiënt van AC.  | (2)  |
| 1.2 | Bepaal die vergelyking van AC in die vorm $y = \dots$                 | (3)  |
| 1.3 | Dui vervolgens of andersins aan dat die middelpunt M van BD op AC lê. | (3)  |
| 1.4 | Dui aan dat $\hat{A}MB = 90^\circ$ .                                  | (3)  |
| 1.5 | Bereken die area van $\triangle ABC$ .                                | (5)  |
|     |   | [16] |

**Oplossing:**

1.1	$m_{AC} = \frac{1 - (-5)}{5 - (-1)}$ $m_{AC} = 1$
-----	---

1.2	Equation of AC is: $y - 1 = 1(x - 5)$ $y = x - 4$ Vergelyking van AC is:
-----	--

1.3	$M(x; y) = \left( \frac{9 - 3}{2}; \frac{-7 + 5}{2} \right)$ $= (3; -1)$
-----	--

Vervang / Substitute  $x = 3$  into equation of AC:  $y = 3 - 4 = -1$

	$\therefore M$ lies on line AC / $M$ lê op lyn AC
--	---

1.4	$m_{BM} = \frac{5 + 1}{-3 - 3}$ $m_{BM} = -1$ $m_{AC} = 1$ $m_{BM} \cdot m_{AC} = -1 \times 1$ $= -1$ $\therefore BM \perp AC \quad \text{or} \quad \hat{AMB} = 90^\circ$
-----	---

1.5	$BM = \sqrt{(5 + 1)^2 + (-3 - 3)^2}$ $BM = \sqrt{72}$ $AC = \sqrt{(5 + 1)^2 + (1 + 5)^2}$ $AC = \sqrt{72}$ $\text{Area of } \triangle ABC = \frac{1}{2}(\sqrt{72})(\sqrt{72})$ $= 36 \text{ square units} \quad / \text{ vierkante eenhede}$
-----	--

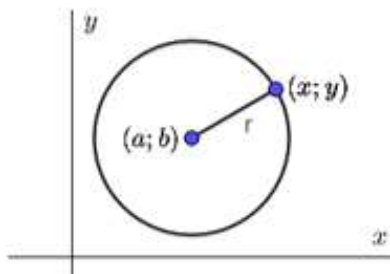
## Vergelyking van 'n Sirkel

### Standaardvorm

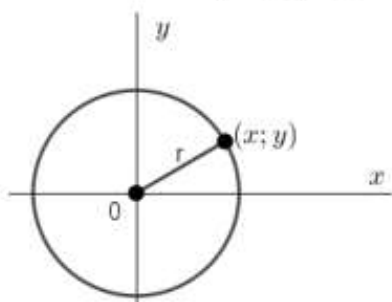
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Middelpunt =  $(a; b)$

$$\text{radius} = \sqrt{r^2} = r$$



Middelpunt by oorsprong  $(0; 0) : x^2 + y^2 = r^2$



### Algemene vorm

$$x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$$

Gegee die vergelyking van die sirkel:  $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 7 = 0$

Bepaal die middelpunt en die radius:

$$x^2 - 6x + y^2 + 8y = -7$$

$$x^2 - 6x + (\square)^2 + y^2 + 8y + (\square)^2 = -7 + (\square)^2 + (\square)^2$$

$$x^2 - 6x + (-3)^2 + y^2 + 8y + (4)^2 = -7 + (-3)^2 + (4)^2$$

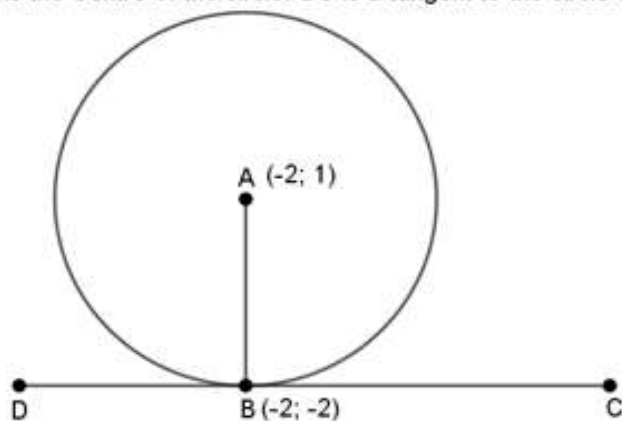
$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 18$$

$$\text{centre} = (3; -4)$$

$$\text{radius} = 3\sqrt{2}$$

## Bepaling van die vergelyking van 'n raaklyn aan 'n sirkel

A is the Centre of the circle. DC is a tangent to the circle at B.



1. Determine the gradient of the radius AB
2.  $AB \perp DC$  (tangent  $\perp$  radius)
3. Determine the gradient of tangent DC  
 $m_1 \times m_2 = -1$
4. Then find the equation of the tangent DC  
 $y = mx + c$

A is die Middelpunt van die sirkel, DC is 'n raaklyn aan die sirkel by B.

1. Bepaal die gradiënt van die radius AB
2.  $AB \perp DC$  (raaklyn  $\perp$  radius)
3. Bepaal die gradiënt van die raaklyn DC  
 $m_1 \times m_2 = -1$
4. Vind dan die vergelyking van die raaklyn DC  
 $y = mx + c$

**Uitgewerkte Voorbeeld 1 (Feb. – Maart 2010)****VRAAG 6**

- 6.1 Bepaal die middelpunt en die radius van die sirkel met die vergelyking  $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 38 = 0$ . (4)
- 6.2 'n Tweede sirkel het die vergelyking  $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 26$ . Bereken die afstand tussen die middelpunte van die twee sirkels. (2)
- 6.3 Toon gevolglik dat die sirkels wat in VRAAG 6.1 en VRAAG 6.2 beskryf word, mekaar sny. (3)
- 6.4 Toon dat die twee sirkels in die lyn  $y = -x + 4$  sny. (4)
- [13]**

**Oplossing:****VRAAG 6**

6.1	$x^2 + y^2 + 8x + 4y - 38 = 0$ $x^2 + 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 = 16 + 4 + 38$ $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 58$ Middelpunt is $(-4 ; -2)$ en die radius is $\sqrt{58}$	✓ voltooi die kwadraat (een of beide) ✓ faktorvorm ✓ middelpunt ✓ radius (4)
6.2	Middelpunt van tweede sirkel is $(4 ; 6)$ Afstand tussen middelpunte is $\sqrt{(4 + 4)^2 + (6 + 2)^2} = \sqrt{128} = 11,31$	✓ middelpunt ✓ afstand (2)
6.3	Som van radiusse $= \sqrt{58} + \sqrt{26} = 12,71$ Afstand tussen middelpunte is 11,31.  Som van die radiusse $>$ afstand tussen die middelpunte  $\therefore$ die sirkels moet oorvleuel en dus moet die sirkels mekaar sny.	✓✓ som van radiusse  ✓ gevolgtrekking (3)

6.4	<p>Vergelyking van tweede sirkel:  <math>(x-4)^2 + (y-6)^2 = 26</math>  <math>x^2 - 8x + 16 + y^2 - 12y + 36 = 26</math>  <math>x^2 - 8x + y^2 - 12y + 26 = 0</math></p> <p>Laat <math>(x; y)</math> enige van die twee punte op die sny punte wees.          Dan  <math>x^2 + y^2 + 8x + 4y - 38 = 0</math>          en <math>x^2 + y^2 - 8x - 12y + 26 = 0</math></p> <hr/> <p>Trek af <math>16y + 16x - 64 = 0</math>  <math>y = -x + 4</math></p> <p>Beide sny punte lê op hierdie lyn.  <math>\therefore y = -x + 4</math> is die vergelyking van die gemeenskaplike koord</p> <p><b>OF</b></p>	<p>✓ vergelyking van sirkel in vorm = 0</p> <p>✓ stelling – twee sny punte          ✓ aftrekking</p> <p>✓ vereenvoudiging (4)</p>
-----	--	---

<p>Toets of die lyn <math>y = -x + 4</math> die twee sirkels op dieselfde punte sny:</p> <p><math>(x-4)^2 + (-x-2)^2 = 26</math>  <math>x^2 - 8x + 16 + x^2 + 4x + 4 = 26</math>  <math>2x^2 - 4x - 6 = 0</math>  <math>x^2 - 2x - 3 = 0</math>  <math>(x-3)(x+1) = 0</math>  <math>x = 3</math> of <math>x = -1</math></p> <p><math>x^2 + y^2 + 8x + 4y - 38 = 0</math>  <math>x^2 + (4-x)^2 + 8x + 4(4-x) - 38 = 0</math>  <math>x^2 + 16 - 8x + x^2 + 8x + 16 - 4x - 38 = 0</math>  <math>2x^2 - 4x - 6 = 0</math>  <math>x^2 - 2x - 3 = 0</math>  <math>x = 3</math> of <math>x = -1</math></p>	<p>✓ vervanging</p> <p>✓ antwoord</p> <p>✓ vervanging</p> <p>✓ antwoord (4)</p> <p>[13]</p>
---	---





5.1.2	$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 15$ $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 15 + 16 + 9$ $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 40$ Middelpunt van sirkel $(4; -3)$ $m_{rad} = \frac{-3 - (-9)}{4 - 2}$ $m_{rad} = 3$ $m_{tan} = -\frac{1}{3}$ $y + 9 = -\frac{1}{3}(x - 2)$ $y = -\frac{1}{3}x - \frac{25}{3}$	✓✓ $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 40$ ✓ middelpunt  ✓ gradiënt van radius  ✓ gradiënt van raaklyn ✓ substitusie ✓ antwoord
-------	---	---

(7)

5.2		
-----	--	--

Radius $AB = \sqrt{10}$ Afstand vanaf A na middelpunt van sirkel is $= \sqrt{(6 - 3)^2 + (4 + 1)^2}$ $= \sqrt{9 + 25}$ $= \sqrt{34}$ $AB^2 = 34 - 10$ $AB^2 = 24$ $AB = \sqrt{24}$ $AB = 2\sqrt{6}$ $AB = 4,90$	✓ radius = $\sqrt{10}$  ✓ substitusie in afstand formule  ✓ $\sqrt{34}$ ✓ $AB^2 = 34 - 10$  ✓ antwoord
---	---

(5)

**OF**

$$r^2 = 10$$

$$r = \sqrt{10}$$

radius  $\perp$  raaklyn

Vlgs Pythagoras

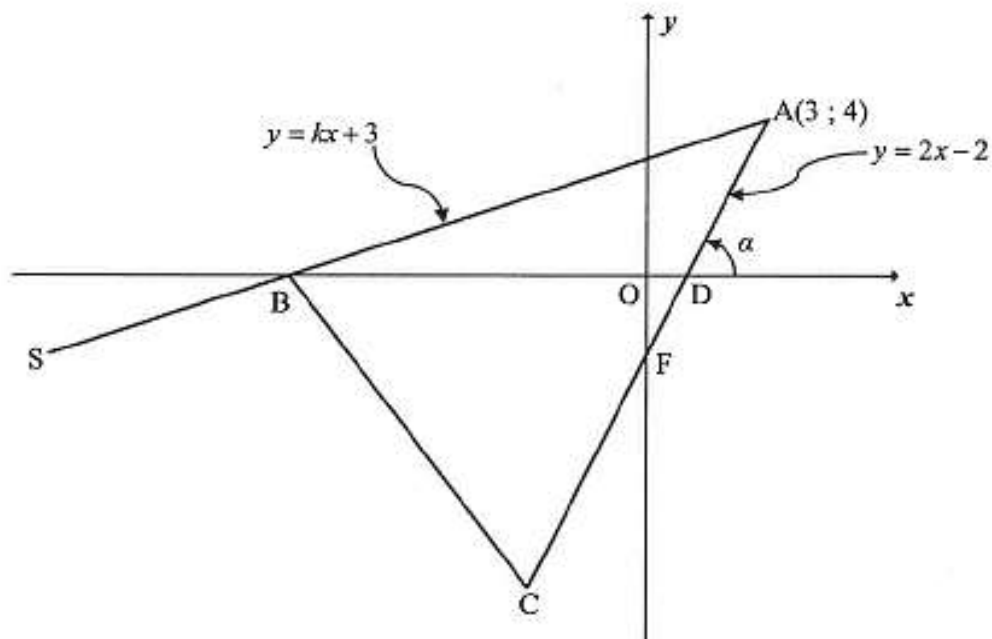
$$AB^2 = (6 - 3)^2 + (4 + 1)^2 - 10$$

$$= 24$$

$$AB = 4,90$$

**AKTIWITEITE****Analitiese Meetkunde***(Mei/Junie 2024)***VRAAG 3**

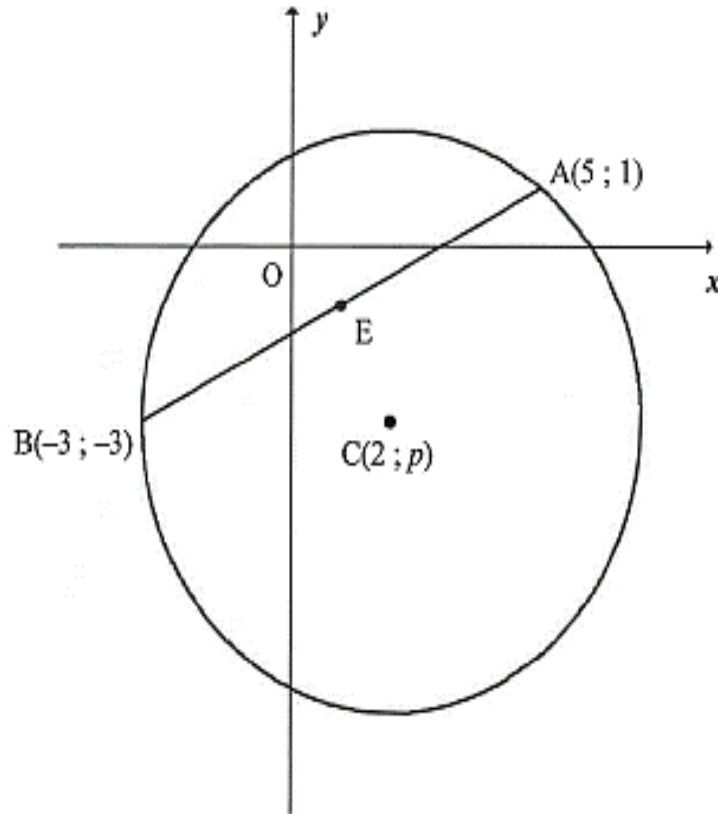
In die diagram is  $A(3; 4)$ ,  $B$  en  $C$  hoekpunte van  $\triangle ABC$ .  $AB$  is verleng na  $S$ .  $D$  en  $F$  is onderskeidelik die  $x$ - en  $y$ -afsnitte van  $AC$ .  $F$  is die middelpunt van  $AC$  en die inklinasiehoek van  $AC$  is  $\alpha$ . Die vergelyking van  $AB$  is  $y = kx + 3$  en die vergelyking van  $AC$  is  $y = 2x - 2$ .



- 3.1 Toon dat  $k = \frac{1}{3}$ . (1)
- 3.2 Bereken die koördinate van  $B$ , die  $x$ -afsnit van lyn  $AS$ . (2)
- 3.3 Bereken die koördinate van  $C$ . (4)
- 3.4 Bepaal die vergelyking van die lyn parallel aan  $BC$  en wat deur  $S(-15; -2)$  gaan. Skryf jou antwoord in die vorm  $y = mx + c$ . (5)
- 3.5 Bereken die grootte van  $\hat{BAC}$ . (5)
- 3.6 As dit verder gegee word dat  $AC$  se lengte  $6\sqrt{5}$  eenhede is, bereken die waarde van Area van  $\triangle ABD$   
Area van  $\triangle ASC$  (5)
- [22]**

**VRAAG 4**

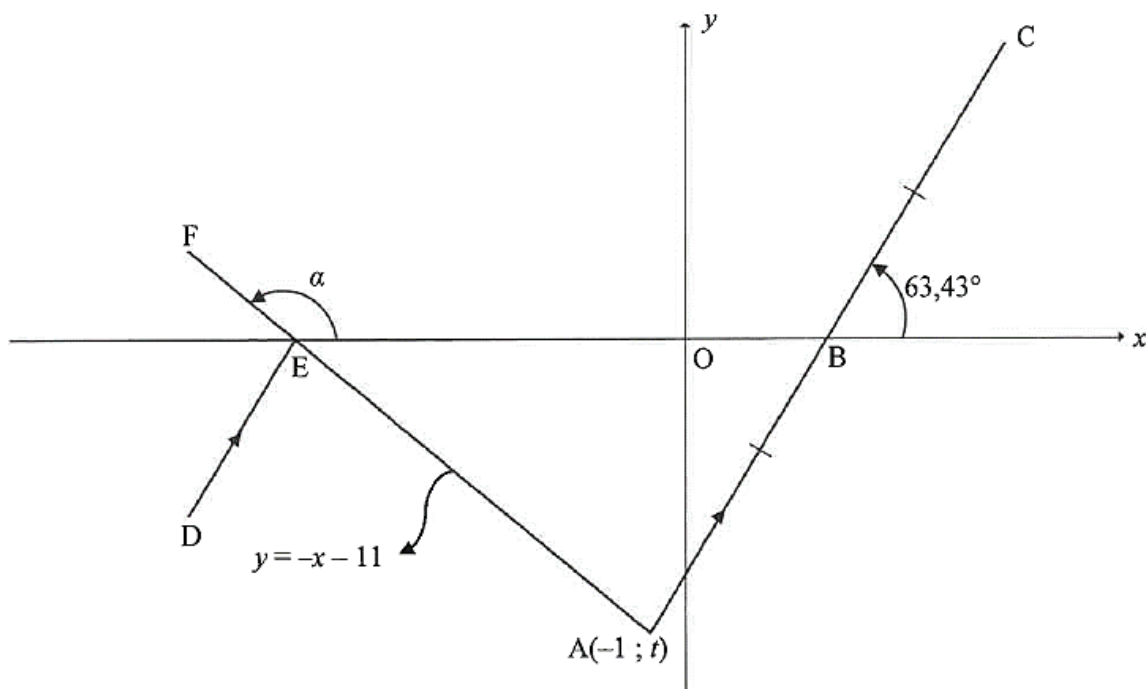
In die diagram is die sirkel met middelpunt  $C(2; p)$  geteken.  $A(5; 1)$  en  $B(-3; -3)$  is punte op die sirkel.  $E$  is die middelpunt van  $AB$ .



- 4.1 Bereken die koördinate van  $E$ , die middelpunt van  $AB$ . (2)
  - 4.2 Bereken die lengte van  $AB$ . Laat jou antwoord in wortelvorm. (1)
  - 4.3 Bepaal die vergelyking van die loodregte lyn wat  $AB$  halveer in die vorm  $y = mx + c$ . (4)
  - 4.4 Toon dat  $p = -3$ . (1)
  - 4.5 Toon, met berekeninge, dat die vergelyking van die sirkel  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$  is. (4)
  - 4.6 Bereken die waardes van  $t$  waarvoor die reguitlyn  $y = tx + 8$  nie die sirkel sal sny nie. (6)
- [18]**

*(Mei/Junie 2023)***VRAAG 3**

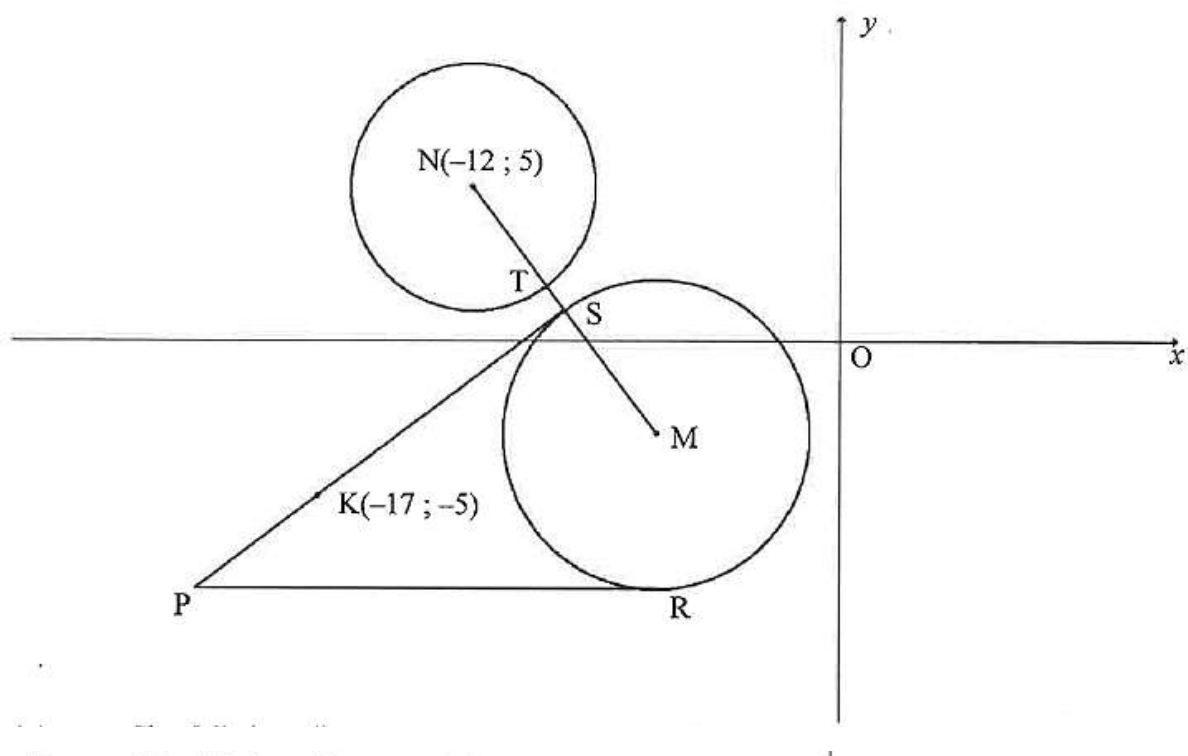
In die diagram is die vergelyking van lyn AF  $y = -x - 11$ . B, 'n punt op die  $x$ -as, is die middelpunt van die reguitlyn wat A(-1 ;  $t$ ) en C verbind. Die inklinasiehoeke van AF en AC is  $\alpha$  en  $63,43^\circ$  onderskeidelik. AF sny die  $x$ -as by E. D is 'n punt sodanig dat  $DE \parallel AC$ .



- 3.1 Bereken die:
- 3.1.1 Waarde van  $t$  (2)
- 3.1.2 Grootte van  $\alpha$  (2)
- 3.1.3 Gradiënt van AC, tot die naaste heelgetal (2)
- 3.2 Bepaal die vergelyking van AC in die vorm  $y = mx + k$ . (2)
- 3.3 Bereken die:
- 3.3.1 Koördinate van C (3)
- 3.3.2 Grootte van  $\widehat{FED}$  (3)
- 3.4 G is 'n punt sodanig dat EAGC, in daardie volgorde, 'n parallelogram is.
- Bepaal die vergelyking van 'n sirkel met middelpunt G en wat deur punt B gaan.
- Skryf jou antwoord in die vorm  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ . (4)
- [18]

## VRAAG 4

In die diagram is die vergelyking van die sirkel met middelpunt  $N(-12; 5)$ ,  $x^2 + y^2 + 24x - 10y + 153 = 0$ . Die vergelyking van die sirkel met middelpunt  $M$  word as  $(x + 6)^2 + (y + 3)^2 = 25$  gegee.  $PS$  en  $PR$  is raaklyne aan die sirkel met middelpunt  $M$  by  $S$  en  $R$  onderskeidelik.  $PR$  is parallel aan die  $x$ -as.  $K(-17; -5)$  is 'n punt op  $PS$ . Die reguitlyn wat  $N$  en  $M$  verbind, sny die kleiner sirkel by  $T$  en die groter sirkel by  $S$ .



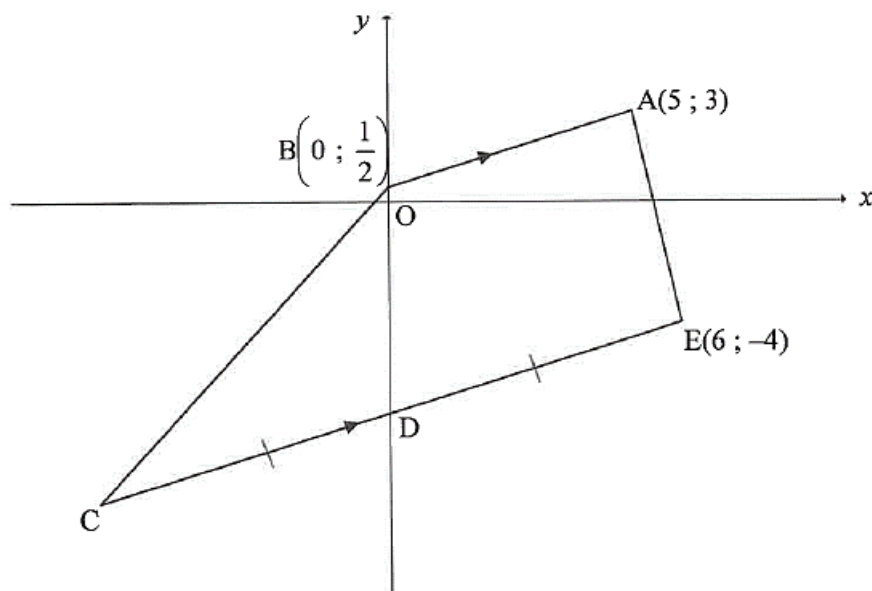
- 4.1 Skryf die koördinate van  $M$  neer. (2)
- 4.2 Bereken die:
  - 4.2.1 Lengte van die radius van die kleiner sirkel (2)
  - 4.2.2 Lengte van  $TS$  (4)
- 4.3 Bepaal die vergelyking van die raaklyn:
  - 4.3.1  $PR$  (2)
  - 4.3.2  $PS$ , in die vorm  $y = mx + c$  (5)
- 4.4 Vierhoek  $PSMR$  is getrek. Bereken die:
  - 4.4.1 Omtrek van  $PSMR$  (5)
  - 4.4.2 Verhouding van  $\frac{\text{oppervlakte van } \triangle NPS}{\text{oppervlakte van vierhoek } PSMR}$  (2)

[22]



*(Mei/Junie 2022)***VRAAG 3**

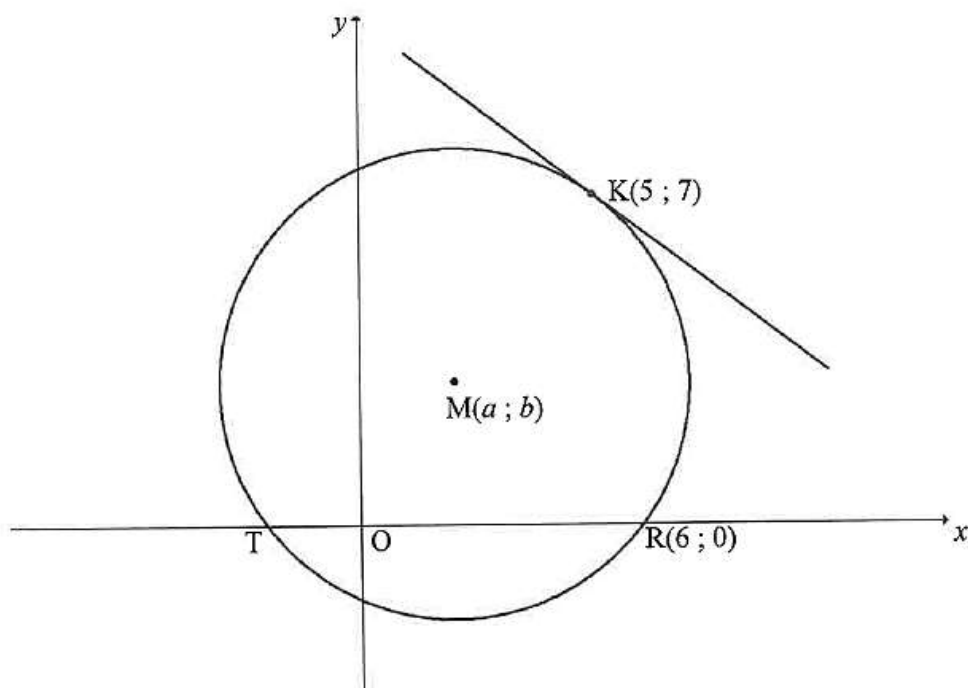
In die diagram is  $A(5; 3)$ ,  $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$ ,  $C$  en  $E(6; -4)$  die hoekpunte van 'n trapesium met  $BA \parallel CE$ .  $D$  is die  $y$ -afsnit van  $CE$  en  $CD = DE$ .



- 3.1 Bereken die gradiënt van  $AB$ . (2)
- 3.2 Bepaal die vergelyking van  $CE$  in die vorm  $y = mx + c$ . (3)
- 3.3 Bereken die:
- 3.3.1 Koördinate van  $C$  (3)
- 3.3.2 Oppervlakte van vierhoek  $ABCD$  (4)
- 3.4 As punt  $K$  die refleksie van  $E$  in die  $y$ -as is:
- 3.4.1 Skryf die koördinate van  $K$  neer (2)
- 3.4.2 Bereken die:
- (a) Omtrek van  $\triangle KEC$  (4)
- (b) Grootte van  $\hat{KCE}$  (3)
- [21]

**VRAAG 4**

In die diagram is die sirkel met middelpunt  $M(a; b)$  geskets. T en  $R(6; 0)$  is die  $x$ -afsnitte van die sirkel. 'n Raaklyn is aan die sirkel by  $K(5; 7)$  getrek.



- 4.1 M is 'n punt op die lyn  $y = x + 1$ .
- 4.1.1 Skryf  $b$  in terme van  $a$ . (1)
- 4.1.2 Bereken die koördinate van M. (5)
- 4.2 As  $(2; 3)$  die koördinate van M is, bereken die lengte van:
- 4.2.1 Die radius van die sirkel (2)
- 4.2.2 TR (2)
- 4.3 Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by K. Skryf jou antwoord in die vorm  $y = mx + c$ . (5)
- 4.4 'n Horisontale lyn word as 'n raaklyn aan die sirkel M by die punt  $N(c; d)$  getrek, waar  $d < 0$ .
- 4.4.1 Skryf die koördinate van N neer. (2)
- 4.4.2 Bepaal die vergelyking van die sirkel met middelpunt N wat deur T gaan. Skryf jou antwoord in die vorm  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ . (3)
- [20]

**AFDELING 5: INLIGTINGSBLAD**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$A = P(1 + ni)$$

$$A = P(1 - ni)$$

$$A = P(1 - i)^n$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$T_n = a + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} ; \quad r \neq 1$$

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r} ; \quad -1 < r < 1$$

$$F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$P = \frac{x[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$y = mx + c$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \tan \theta$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\text{In } \triangle ABC: \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$\text{area } \triangle ABC = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 1 - 2\sin^2 \alpha \\ 2\cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$$

$$\hat{y} = a + bx$$

$$b = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum (x - \bar{x})^2}$$



## AFDELING 6: BIBLIOGRAFIE

1	JENN 2024 Last Push Study Guide
2	Grade 12 Mathematics Examination Guidelines, 2021
3	May/June Dbe National Papers of 2022, 2023 and 2024 and Feb.-Mar 2010-2012
4	November Dbe National Papers of 2008 - 2012 2022, 2023 and 2024
5	Bubble Gum Notes
6	<a href="http://www.mathsisfun.com">www.mathsisfun.com</a>
7	Mind Action Series Grade 11 and 12 Textbook
8	Maths Made Easy – A Comprehensive Guide to Grade 12 Mathematics
9	Maths Clinic Smart Preparation for Grade 12
10	How I teach
11	FET CAPS Document
12	<a href="https://www.highermathematics.co.uk/increasing-decreasing-functions/">https://www.highermathematics.co.uk/increasing-decreasing-functions/</a>
13	<a href="http://vassarstats.net/textbook/ch2pt1.html">http://vassarstats.net/textbook/ch2pt1.html</a>
14	Master Maths Notes
15	<a href="https://www.biorender.com/template/histogram-distributions">https://www.biorender.com/template/histogram-distributions</a>